

В другой системе  $X' OY'$ , повернутой на  $45^\circ$  относительно нештрихованной, эта же величина определяется матрицей:

$$\begin{vmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 3/2 & -7/2 \end{vmatrix}.$$

Выяснить, является ли данная величина тензором.

3. В каком случае матрица тензорного произведения двух векторов содержит только один ненулевой элемент?

4. В какой системе координат одна из составляющих диады  $\hat{D} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$  обращается в нуль? Чему в этом случае равна длина второй составляющей? Является ли инвариантом суммарная длина составляющих диады  $|\vec{D}_1 + \vec{D}_2|$ ?

## § 5. Тензорная алгебра

Над тензорами как своеобразными математическими величинами, характеризующими определенные физические свойства реальных тел, можно производить ряд алгебраических операций: складывать, умножать на числа, умножать тензор на тензор и др. Поэтому множество тензоров образует алгебру, являющуюся обобщением векторной алгебры.

Поскольку тензор в любой системе координат характеризуется скалярными компонентами  $p_{jk}$ , то естественно любое действие над тензорами определять как операцию над компонентами; при этом результат операции должен быть инвариантен относительно преобразования координат.

Перейдем к ознакомлению с простейшими алгебраическими операциями над тензорами.

1. Суммой двух тензоров  $\hat{\Pi}'$  и  $\hat{\Pi}''$  называется тензор

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}' + \hat{\Pi}'',$$

компоненты которого равны суммам компонентов слагаемых:

$$p_{jk} = p'_{jk} + p''_{jk}.$$

2. Произведением тензора  $\hat{\Pi}$  на число  $\lambda$  называется тензор  $\hat{\pi} = \lambda \hat{\Pi}$ , компоненты которого  $t_{jk}$  равны произведению соответствующих компонентов  $p_{jk}$  на  $\lambda$ :

$$t_{jk} = \lambda p_{jk}.$$

Обобщением операций 1 и 2 являются линейные комбинации нескольких тензоров. Пусть даны  $n$  тензоров

$\hat{\Pi}', \hat{\Pi}'', \dots, \hat{\Pi}^{(n)}$  и  $n$  чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ; линейная комбинация

$$\lambda_1 \hat{\Pi}' + \lambda_2 \hat{\Pi}'' + \dots + \lambda_n \hat{\Pi}^{(n)}$$

есть некоторый тензор  $\hat{\mathcal{P}}$ , компоненты которого  $t_{jk}$  суть линейные комбинации соответствующих компонентов  $p_{jk}^{(n)}$ :

$$t_{jk} = \lambda_1 p'_{jk} + \lambda_2 p''_{jk} + \dots + \lambda_n p_{jk}^{(n)}.$$

3. Перестановкой индексов (транспонированием) называется операция, превращающая тензор  $\hat{\Pi}$  с компонентами  $p_{jk}$  в транспонированный тензор  $\hat{\tilde{\Pi}}$ , компоненты которого  $p_{jk} = p_{kj}$ . Так, если

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\hat{\tilde{\Pi}} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix}.$$

В частности, в случае симметричного и антисимметричного тензоров  $\hat{S} = \hat{S}$  и  $\hat{A} = -\hat{A}$ .

Следствием из рассмотренных трех операций является утверждение, что любой тензор  $\hat{\Pi}$  всегда можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\hat{\Pi} = \hat{S} + \hat{A}.$$

Действительно, переставляя индексы у каждого из тензоров этого равенства, получим:

$$\hat{\tilde{\Pi}} = \hat{S} - \hat{A}.$$

Складывая и вычитая оба эти тензорных равенства, находим, что

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\tilde{\Pi}}) \text{ и } \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\tilde{\Pi}}). \text{ Таким образом, } \hat{\Pi} = \frac{1}{2}(\hat{\Pi} + \hat{\tilde{\Pi}}) + \frac{1}{2}(\hat{\Pi} - \hat{\tilde{\Pi}}).$$

4. Скалярным произведением тензора  $\hat{\Pi} = \vec{i}_1 \vec{p}_1 + \vec{i}_2 \vec{p}_2$  на вектор  $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2$  справа называется новый вектор

топ  $\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \vec{i}_1(\vec{p}, \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}, \vec{a})$ . Иными словами, компоненты нового вектора  $\vec{a}' = \vec{i}_1 a'_1 + \vec{i}_2 a'_2$  равны:

$$\left. \begin{aligned} a'_1 &= p_{11}a_1 + p_{12}a_2, \\ a'_2 &= p_{21}a_1 + p_{22}a_2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

или (в сокращенной записи):

$$a'_j = \sum_k p_{jk}a_k. \quad (12')$$

5. Скалярным произведением тензора  $\hat{\Pi} = \vec{i}_1 \vec{p}_1 + \vec{i}_2 \vec{p}_2$  и вектора  $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2$  слева называется вектор  $\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi}) = (\vec{a}, \vec{i}_1) \vec{p}_1 + (\vec{a}, \vec{i}_2) \vec{p}_2$ . Компоненты вектора  $\vec{a}''$  равны

$$\left. \begin{aligned} a''_1 &= a_1 p_{11} + a_2 p_{21}, \\ a''_2 &= a_1 p_{12} + a_2 p_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

или (в сжатой форме):

$$a''_j = \sum_k a_k p_{kj}. \quad (13')$$

Легко видеть, что скалярное произведение тензора  $\hat{\Pi}$  на вектор  $\vec{a}$  слева равно произведению транспонированного тензора  $\hat{\Pi}$  на тот же вектор справа, и наоборот:

$$(\hat{\Pi}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{\Pi}).$$

Отсюда далее вытекает, что в случае симметричного тензора  $\hat{S}$  скалярное произведение его на произвольный вектор не зависит от порядка сомножителей (это произведение коммутативно):

$$(\hat{S}, \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{S}).$$

Произведение же антисимметричного тензора  $\hat{A}$  на вектор антикоммутативно:

$$(\hat{A}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \hat{A}).$$

Заметим, что для вычисления компонентов векторов  $\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a})$  и  $\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi})$  удобно пользоваться известными правилами умножения матриц, рассматривая любой вектор

как некоторую столбцовую или строчную матрицу

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ или } \vec{\vec{a}} = (a_1, a_2);$$

$$\vec{a}' = (\hat{\Pi}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}'' = (\vec{a}, \hat{\Pi}) = (a_1, a_2) \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = (a_1 p_{11} + a_2 p_{21}, \dots).$$

В первом случае мы получили вектор  $\vec{a}'$  в виде столбцовой матрицы, во втором — вектор  $\vec{a}''$  в виде строчной.

6. Скалярным произведением двух тензоров  $\hat{\Pi}$  и  $\hat{\mathcal{M}}$  называется тензор  $\hat{\Phi}$ , матрицы компонентов которого равны произведению матриц тензоров сомножителей, т. е.  $\Phi_{kl} = \sum p_{kj} t_{ji}$ :

$$\hat{\Phi} = \hat{\Pi} \cdot \hat{\mathcal{M}} = \begin{vmatrix} p_{11}p_{12} \\ p_{21}p_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{11}t_{12} \\ t_{21}t_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{11}t_{11} + p_{12}t_{21} & p_{11}t_{12} + p_{12}t_{22} \\ p_{21}t_{11} + p_{22}t_{21} & p_{21}t_{12} + p_{22}t_{22} \end{vmatrix}.$$

Кроме перечисленных, существует еще ряд более сложных операций над тензорами, но мы их рассматривать не будем.

## § 6. Тензор как аффинор

Тот факт, что при умножении тензора  $\hat{\Pi}$  на вектор  $\vec{a}$  получается не зависящий от системы координат новый вектор  $\vec{a}'$ , позволяет рассматривать тензор не только как математическую величину, но и как некий *оператор*, превращающий один вектор в другой. Вообще, оператором, или преобразованием, называют правило, сопоставляющее функции  $u(x)$  определенную функцию  $v(x)$ . Операторы, которые прямые линии преобразуют в прямые, называют *аффинорами*.

С различными свойствами операторов мы подробнее познакомимся в ч. III, а сейчас ограничимся тем, что любой тензор можно рассматривать как аффинор и, наоборот, каждому аффинору можно сопоставить некоторый тензор. Поэтому можно дать новое определение тензора.

Если некоторый оператор  $\hat{\Pi}$ , характеризующийся в каждой системе координат своей четверкой чисел  $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$ , преобразует произвольный вектор  $\vec{a}$  в новый вектор  $\vec{a}'$  по линейным формулам (12), то  $\hat{\Pi}$  есть аффинор (тензор).