как некоторую столбцевую или строчную матрицу $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ или $\vec{a}=(a_1, a_2)$:

$$\vec{a}'=(\hat{\Pi}, \vec{a})=\begin{Vmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{21} & p_{22}\end{Vmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}a_1+p_{12}a_2\\p_{21}a_1+p_{22}a_2\end{pmatrix},$$

$$\vec{a}''=(\vec{a}, \hat{\Pi})=(a_1, a_2)\cdot\begin{Vmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{21} & p_{22}\end{Vmatrix}=(a_1p_{11}+a_2p_{21}, \ldots).$$

В первом случае мы получили вектор $\vec{a}'$ в виде столбцевой матрицы, во втором—вектор $\vec{a}''$ в виде строчной.

6. Скалярным произведением двух тензоров $\hat{\Pi}$ и $\hat{\mathcal{T}}$ называется тензор $\hat{\Phi}$, матрицы компонентов которого равны произведению матриц тензоров сомножителей, т. е. $\varphi_{kl}=\Sigma p_{kj}t_{jl}$:

$$\hat{\Phi}=\hat{\Pi}\cdot\hat{\mathcal{T}}=\begin{Vmatrix}p_{11}p_{12}\\p_{21}p_{22}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}t_{11}t_{12}\\t_{21}t_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}p_{11}t_{11}+p_{12}t_{21} & p_{11}t_{12}+p_{12}t_{22}\\p_{21}t_{11}+p_{22}t_{21} & p_{21}t_{12}+p_{22}t_{22}\end{Vmatrix}.$$

Кроме перечисленных, существует еще ряд более сложных операций над тензорами, но мы их рассматривать не будем.

§ 6. Тензор как аффинор

Тот факт, что при умножении тензора $\hat{\Pi}$ на вектор $\vec{a}$ получается не зависящий от системы координат новый вектор $\vec{a}'$, позволяет рассматривать тензор не только как математическую величину, но и как некий *оператор*, превращающий один вектор в другой. Вообще, оператором, или преобразованием, называют правило, сопоставляющее функции $u(x)$ определенную функцию $v(x)$. Операторы, которые прямые линии преобразуют в прямые, называют *аффинорами*.

С различными свойствами операторов мы подробнее познакомимся в ч. III, а сейчас ограничимся тем, что любой тензор можно рассматривать как аффинор и, наоборот, каждому аффинору можно сопоставить некоторый тензор. Поэтому можно дать новое определение тензора.

Если некоторый оператор $\hat{\Pi}$, характеризующийся в каждой системе координат своей четверкой чисел p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, преобразует произвольный вектор $\vec{a}$ в новый вектор $\vec{a}'$ по линейным формулам (12), то $\hat{\Pi}$ есть аффинор (тензор).

Отсюда получается критерий, с помощью которого можно судить, является ли математический объект П, определяемый в каждой системе координат своей матрицей чисел:

$$\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix},$$

тензором или нет. А именно, пусть некоторый вектор $\vec{a}$ характеризуется (в данной системе координат) определенной столбцевой матрицей $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Ясно, что в результате умножения квадратной матрицы $\|p_{jk}\|$ на матрицу-столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ мы получим новую столбцевую матрицу:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 \end{pmatrix}.$$

В различных координатных системах элементы b_1 и b_2 будут выглядеть по-разному, но если всегда они характеризуют один и тот же вектор $\vec{b}$, то матрица $\|p_{jk}\|$ определяет тензор (или аффинор) $\hat{\Pi}$.

Применим теперь этот критерий для получения явного вида тензора как производной векторной функции по векторному аргументу. Пусть дано векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$. При бесконечно малом смещении $d\vec{r}$ из некоторой точки поля в соседнюю точку функция $\vec{a}$ получает приращение $d\vec{a}$. Чтобы связать $d\vec{a}$ и $d\vec{r}$, выберем какую-нибудь координатную систему с осями X_1 и X_2. Каждую точку поля будем определять не вектором $\vec{r}$, а числами x_1 и x_2, а векторную функцию $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x_1, x_2)$ заменим полностью эквивалентной системой двух скалярных функций координат $a_1(x_1, x_2)$ и $a_2(x_1, x_2)$. Соответственно вектор приращения функции $d\vec{a}$ будет характеризоваться двумя скалярными дифференциалами $da_1(x_1, x_2)$ и $da_2(x_1, x_2)$. По правилам дифференцирования функций нескольких переменных мы вправе записать:

$$\left.\begin{aligned} da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2, \\ da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Если бы мы выбрали иную систему координат (X_1', X_2'), то рассматриваемые векторы имели бы другие компоненты:

$$\vec{a}\,(a_1', a_2'),\ d\vec{a}\,(da_1', da_2'),\ d\vec{r}\,(dx_1', dx_2').$$

Соответственно равенства (14) приняли бы форму:

$$\left.\begin{aligned} da_1' &= \frac{\partial a_1'}{\partial x_1'}dx_1 + \frac{\partial a_1'}{\partial x_2'}dx_2', \\ da_2' &= \frac{\partial a_2'}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial a_2'}{\partial x_2'}dx_2'. \end{aligned}\right\} \qquad (14')$$

Сопоставляя равенства (14) и (14′), можно убедиться, что в каждой системе координат имеется своя четверка скалярных величин $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$, которая компонентам вектора $d\vec{r}\,(dx_1, dx_2)$ линейным образом сопоставляет компоненты одного и того же вектора $d\vec{a}\,(da_1, da_2)$.

Следовательно, эта совокупность чисел образует аффинор, называемый *тензором-производной* векторной функции по векторному аргументу и обозначаемый так:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{Vmatrix}. \qquad (15)$$

Этот тензор полностью характеризует быстроту изменения зависимой переменной $\vec{a}$. Равенства (14) могут быть теперь записаны в тензорном виде:

$$d\vec{a} = \left(\widehat{\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}},\ d\vec{r}\right). \qquad (16)$$

§ 7. Главные направления тензора

Мы уже неоднократно отмечали, что при скалярном умножении тензора на вектор получается новый вектор, вообще говоря, отличный от первоначального как по модулю, так и по направлению.

Оказывается, и мы сейчас убедимся в этом, у тензоров существуют некоторые *главные направления* на плоскости, такие, что, воздействуя тензором на вектор $\vec{a}$, взятый вдоль такого направления, получим новый вектор $\vec{a}'$, коллинеарный первоначальному. Иными словами, если на-