

Если бы мы выбрали иную систему координат (X'_1, X'_2), то рассматриваемые векторы имели бы другие компоненты:

$$\vec{a}(a'_1, a'_2), \vec{da}(da'_1, da'_2), \vec{dr}(dx'_1, dx'_2).$$

Соответственно равенства (14) приняли бы форму:

$$\left. \begin{aligned} da'_1 &= \frac{\partial a'_1}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial a'_1}{\partial x'_2} dx'_2, \\ da'_2 &= \frac{\partial a'_2}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial a'_2}{\partial x'_2} dx'_2. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Сопоставляя равенства (14) и (14'), можно убедиться, что в каждой системе координат имеется своя четверка скалярных величин $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$, которая компонентам вектора $\vec{dr}(dx_1, dx_2)$ линейным образом сопоставляет компоненты одного и того же вектора $\vec{da}(da_1, da_2)$.

Следовательно, эта совокупность чисел образует аффинор, называемый *тензором-производной* векторной функции по векторному аргументу и обозначаемый так:

$$\vec{dr} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Этот тензор полностью характеризует быстроту изменения зависимой переменной \vec{a} . Равенства (14) могут быть теперь записаны в тензорном виде:

$$\vec{da} = \left(\overset{\wedge}{\frac{da}{dr}}, \vec{dr} \right). \quad (16)$$

§ 7. Главные направления тензора

Мы уже неоднократно отмечали, что при скалярном умножении тензора на вектор получается новый вектор, вообще говоря, отличный от первоначального как по модулю, так и по направлению.

Оказывается, и мы сейчас убедимся в этом, у тензоров существуют некоторые *главные направления* на плоскости, такие, что, воздействуя тензором на вектор \vec{a} , взятый вдоль такого направления, получим новый вектор \vec{a}' , коллинеарный первоначальному. Иными словами, если на-

правление вектора \vec{a} совпадает с главным направлением тензора $\hat{\Pi}$, то $(\hat{\Pi}, \vec{a}) = \lambda \vec{a}$. Скалярная величина λ называется *главным или собственным значением тензора*; она показывает, во сколько раз тензор $\hat{\Pi}$ изменяет длину векторов, расположенных вдоль главного направления (поэтому число λ еще называют *коэффициентом расстяжения*).

Выясним, сколько главных направлений имеет данный тензор и как они ориентированы на плоскости. Запишем векторное равенство (17) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 &= \lambda a_1, \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 &= \lambda a_2. \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Эту систему уравнений можно представить так:

$$\begin{aligned} (p_{11} - \lambda)a_1 + p_{12}a_2 &= 0, \\ p_{21}a_1 + (p_{22} - \lambda)a_2 &= 0. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (18)$$

Полученная система однородных линейных уравнений относительно a_1 и a_2 имеет ненулевые решения только в том случае, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

В развернутом виде это уравнение, называемое *характеристическим*, имеет вид:

$$\lambda^2 - \lambda(p_{11} + p_{22}) + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (19')$$

Из него находим собственные значения λ . В том случае, когда оба корня λ_I и λ_{II} действительны, мы получим, вообще говоря, два главных направления. Действительно, подставляя в (18) последовательно значения λ_I и λ_{II} , мы для каждого из них получим соответствующие отношения компонентов векторов \vec{a}^I и \vec{a}^{II} . Главные направления определяются углами α_I и α_{II} между векторами \vec{a}^I и \vec{a}^{II} и осью X_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha_I = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_I = \frac{\lambda_I - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_I - p_{22}}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)_{II} = \frac{\lambda_{II} - p_{11}}{p_{12}} = \frac{p_{21}}{\lambda_{II} - p_{22}}. \quad (20')$$

Легко понять, что в случае трехмерного тензора мы с помощью аналогичных рассуждений получили бы кубическое характеристическое уравнение, которое имеет по крайней мере одно действительное значение (остальные два корня могут быть мнимыми). Поэтому у пространственного тензора всегда существует либо одно, либо три главных направления.

В дальнейшем мы будем рассматривать наиболее важный для практики класс симметричных тензоров, у которых, как можно показать, главные значения λ являются действительными числами.

Можно также доказать, что главные направления, или оси симметричного тензора в общем случае, когда корни различные ($\lambda_1 \neq \lambda_{II}$), взаимно перпендикулярны. И только в случае кратных корней ($\lambda_1 = \lambda_{II}$) все направления на плоскости являются главными и в качестве осей тензора можно выбрать любые два взаимно перпендикулярные направления. (Почему так ведут себя тензоры с одинаковыми главными значениями, станет ясно из последующего.)

Задача. В системе XOY тензор \hat{S} характеризуется матрицей:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Найти его главные направления.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Отсюда $\lambda = 2 \pm 1$. Следовательно, главные значения тензора равны $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{II} = 1$. Подставляя в (20) значение $\lambda_1 = 3$, получаем первое главное направление:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3-2}{-1} = -1, \quad \alpha_1 = 135^\circ.$$

Аналогично для второго главного направления:

$$\operatorname{tg} \alpha_{II} = \frac{1-2}{-1} = +1, \quad \alpha_{II} = 45^\circ.$$

Таким образом, главные направления пересекаются под прямым углом (рис. 6).

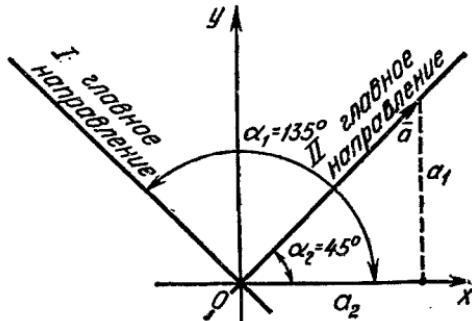


Рис. 6

Поскольку симметричный тензор всегда имеет два взаимно перпендикулярных направления, естественно рассмотреть представление тензора в системе координат, оси которой совпадают с главными осями этого тензора.

Обозначим компоненты тензора \hat{S} в такой координатной системе через s_{ik}^o . Умножив скалярио \hat{S} на орты $\vec{i}_1(1, 0)$ и $\vec{i}_2(0, 1)$ главных осей, получим:

$$\begin{aligned} (\hat{S}, \vec{i}_1) &= \lambda_I \vec{i}_1, \\ (\hat{S}, \vec{i}_2) &= \lambda_{II} \vec{i}_2. \end{aligned}$$

Спроектировав каждое из этих равенств на обе оси координат и принимая во внимание формулы (18), мы легко получим, что $s_{11}^o = \lambda_I$, $s_{22}^o = \lambda_{II}$, $s_{12}^o = s_{21}^o = 0$. Поэтому тензор, приведенный к главным осям, имеет диагональный вид:

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} \lambda_I & 0 \\ 0 & \lambda_{II} \end{vmatrix},$$

а его составляющие направлены вдоль координатных осей и соответственно равны: $\vec{s}_1 = \lambda_I \vec{i}_1$, $\vec{s}_2 = \lambda_{II} \vec{i}_2$.

Мы знаем, что, хотя компоненты тензора принимают в разных системах координат различные значения, существуют некоторые инвариантные соотношения между компонентами, верные в любой системе.

Чтобы установить вид этих соотношений, учтем, что у каждого тензора имеются свои главные направления и соответствующие им главные значения λ_I и λ_{II} , которые имеют непосредственный геометрический или физический смысл, не зависящий от выбора осей координат.

С другой стороны, главные значения определяются из характеристического уравнения (19'), коэффициентами которого являются некоторые функции компонентов тензора. Для того чтобы значения корней λ_1 и λ_{II} этого уравнения не зависели от выбора системы координат, коэффициенты квадратного уравнения должны быть неизменными. Отсюда мы получаем два инварианта, связанные с главными значениями по теореме Виетта:

$$\text{Inv}_1 = p_{11} + p_{22} = \lambda_1 + \lambda_{II},$$

$$\text{Inv}_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_{II}.$$

Сумма диагональных элементов тензора и определитель матрицы его компонентов не зависят от системы координат и являются основными инвариантами двумерного тензора.

§ 8. Тензорный эллипс

Тензору, вообще говоря, нельзя сопоставить определенный геометрический образ (и этим, в частности, объясняется трудность усвоения тензорного исчисления). Однако в случае симметричных тензоров, с которыми обычно имеют дело в физике, такое наглядное представление возможно. А именно, каждому *неособенному*¹ симметричному тензору¹ можно сопоставить на плоскости центральную коническую кривую — эллипс (чаще всего) или гиперболу.

Рассмотрим симметричный тензор

$$\hat{S} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix},$$

у которого $s_{12} = s_{21}$.

Попытаемся определить геометрическое место точек, описываемое векторным уравнением:

$$(\vec{r}, \hat{S}\vec{r}) = 1, \quad (21)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ — текущий радиус-вектор точек исследуемой линии. Если бы тензор \hat{S} был равен единичному тензору \hat{I} , то уравнение (21) приняло бы, очевидно, форму $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$

¹ Неособенным называется тензор, определитель матрицы которого не равен нулю.