С другой стороны, главные значения определяются из характеристического уравнения (19′), коэффициентами которого являются некоторые функции компонентов тензора. Для того чтобы значения корней λ_I и λ_{II} этого уравнения не зависели от выбора системы координат, коэффициенты квадратного уравнения должны быть неизменными. Отсюда мы получаем два инварианта, связанные с главными значениями по теореме Виетта:

$$\mathrm{Inv}_1 = p_{11} + p_{22} = \lambda_I + \lambda_{II},$$

$$\mathrm{Inv}_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \lambda_I \lambda_{II}.$$

Сумма диагональных элементов тензора и определитель матрицы его компонентов не зависят от системы координат и являются основными инвариантами двумерного тензора.

§ 8. Тензорный эллипс

Тензору, вообще говоря, нельзя сопоставить определенный геометрический образ (и этим, в частности, объясняется трудность усвоения тензорного исчисления). Однако в случае симметричных тензоров, с которыми обычно имеют дело в физике, такое наглядное представление возможно. А именно, каждому *неособенному* симметричному тензору[1] можно сопоставить на плоскости центральную коническую кривую — эллипс (чаще всего) или гиперболу.

Рассмотрим симметричный тензор

$$\hat{S} = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{Vmatrix},$$

у которого $s_{12} = s_{21}$.

Попытаемся определить геометрическое место точек, описываемое векторным уравнением:

$$(\vec{r},\ \hat{S}\vec{r}) = 1, \tag{21}$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ — текущий радиус-вектор точек исследуемой линии. Если бы тензор $\hat{S}$ был равен единичному тензору $\hat{I}$, то уравнение (21) приняло бы, очевидно, форму $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$

[1] *Неособенным* называется тензор, определитель матрицы которого не равен нулю.

или (в координатной записи) $x^2+y^2=1$, т. е. выражало бы собой окружность.

В общем же случае, когда $\hat{S}\neq\hat{I}$, уравнение (21) описывает более сложную кривую. Мы знаем, что $(\hat{S}\vec{r})$ есть некоторый вектор $\vec{r}'$, определяемый согласно (12) следующим образом:

$$\vec{r}'=(\hat{S},\ \vec{r})=\vec{i}\,(s_{11}x+s_{12}y)+\vec{j}\,(s_{21}x+s_{22}y).$$

(Мы временно возвратились к обозначениям координат через x, y вместо x_1, x_2, чтобы удобнее было сопоставить наши соотношения с обычными формулами аналитической геометрии.) Умножая теперь скалярно $\vec{r}$ на $\vec{r}'$, получаем уравнение второй степени:

$$s_{11}x^2+2s_{12}xy+s_{22}y^2=1. \qquad (22)$$

Поскольку его дискриминант совпадает с определителем тензора $\hat{S}$, который по предположению не равен нулю, то уравнение (22) описывает центральную кривую второго порядка — эллипс или гиперболу. Связь между симметричным тензором $\hat{S}$ и соответствующей ему линией $(\vec{r},\ \hat{S}\vec{r})=1$ становится особенно ясной, если их выразить в системе координат, совпадающей с главными осями тензора. Поскольку в этом случае матрица компонентов тензора $\hat{S}$ принимает диагональный вид:

$$\hat{S}=\begin{Vmatrix} s_{11}^0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 \end{Vmatrix},$$

где $s_{11}^0=\lambda_{\mathrm{I}}$, $s_{22}^0=\lambda_{\mathrm{II}}$, то уравнение кривой $(\vec{r},\ \hat{S}\vec{r})=1$ тоже упрощается:

$$\frac{x^2}{1/\lambda_{\mathrm{I}}}+\frac{y^2}{1/\lambda_{\mathrm{II}}}=1. \qquad (23)$$

Отсюда сразу вытекает, что в случае, когда $\lambda_{\mathrm{I}}>0$, $\lambda_{\mathrm{II}}>0$, мы имеем эллипс, а при $\lambda_{\mathrm{I}}>0$, $\lambda_{\mathrm{II}}<0$ (или наоборот) — гиперболу. Заметим, что если оба главных значения λ_{I} и λ_{II} отрицательны, то уравнение (23) описывает мнимый эллипс.

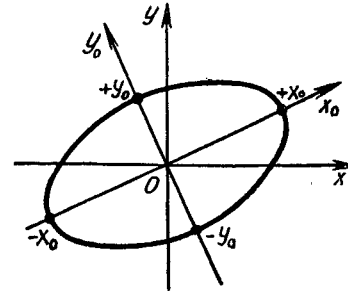

Рис. 7

Определим теперь точки пересечения тензорного эллипса с осями координат. Из уравнения (23) ясно, что на главных осях эллипс отсекает отрезки $x_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{\mathrm{I}}}$, $y_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{\mathrm{II}}}$. Полагая попеременно $y = 0$ и $x = 0$, мы для всех других направлений осей координат аналогично найдем из уравнения (22), что эллипс пересекает ось абсцисс в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{11}}}$ и ось ординат в точках $y = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{22}}}$.

Таким образом, зная тензорный эллипс, можно графически определить диагональные элементы этого тензора в любой системе координат с помощью соотношений $s_{11} = 1/x^2$, $s_{22} = 1/y^2$ (рис. 7).

Глава II.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ И МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

В предыдущей главе мы познакомились с простейшими двумерными векторами и тензорами. Теперь мы обобщим полученные там соотношения на наиболее важный для практики случай реального трехмерного пространства, а также на пространства более высоких размерностей.

При этом по-прежнему будем пользоваться прямоугольными декартовыми координатами.

§ 1. Векторы и тензоры в n-мерном пространстве

Обобщая понятие двумерного вектора, данное в § 2 предыдущей главы, назовем n-мерным вектором $\vec{a}$ величину, характеризуемую в каждой системе координат n скалярными компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые при повороте осей координат преобразуются по определенному линейному закону:

$$a'_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} a_k, \tag{1}$$

где коэффициенты β_{ik} характеризуют n-мерный угол поворота координатных осей. (Свойства этих коэффициентов будут подробно рассмотрены в ч. III.)