Определим теперь точки пересечения тензорного эллипса с осями координат. Из уравнения (23) ясно, что на главных осях эллипс отсекает отрезки $x_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{\mathrm{I}}}$, $y_0 = \pm\sqrt{1/\lambda_{\mathrm{II}}}$. Полагая попеременно $y = 0$ и $x = 0$, мы для всех других направлений осей координат аналогично найдем из уравнения (22), что эллипс пересекает ось абсцисс в точках $x = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{11}}}$ и ось ординат в точках $y = \pm\frac{1}{\sqrt{s_{22}}}$.

Таким образом, зная тензорный эллипс, можно графически определить диагональные элементы этого тензора в любой системе координат с помощью соотношений $s_{11} = 1/x^2$, $s_{22} = 1/y^2$ (рис. 7).

Глава II.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ И МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

В предыдущей главе мы познакомились с простейшими двумерными векторами и тензорами. Теперь мы обобщим полученные там соотношения на наиболее важный для практики случай реального трехмерного пространства, а также на пространства более высоких размерностей.

При этом по-прежнему будем пользоваться прямоугольными декартовыми координатами.

§ 1. Векторы и тензоры в n-мерном пространстве

Обобщая понятие двумерного вектора, данное в § 2 предыдущей главы, назовем n-мерным вектором $\vec{a}$ величину, характеризуемую в каждой системе координат n скалярными компонентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые при повороте осей координат преобразуются по определенному линейному закону:

$$a'_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} a_k, \tag{1}$$

где коэффициенты β_{ik} характеризуют n-мерный угол поворота координатных осей. (Свойства этих коэффициентов будут подробно рассмотрены в ч. III.)

Всякий n-мерный вектор можно представить в таком виде:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{i}_k a_k, \tag{2}$$

где $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$ — орты осей координат.

Длиной вектора $\vec{a}$ называется величина

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}, \tag{3}$$

не зависящая от выбора координатной системы.

В частности, трехмерный вектор записывается в виде:

$$\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$$

или, что то же самое, в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Аналогично обобщается понятие тензора второго ранга: **n-мерным тензором $\hat{\Pi}$ называется величина, характеризуемая в каждой системе координат n векторными составляющими $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, либо n^2 скалярными компонентами $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$, причем и составляющие, и компоненты при повороте осей координат преобразуются по линейным законам** (см. ч. III):

$$\vec{p}'_j = \sum_k \beta_{jk} \vec{p}_k,$$

$$p_{jk} = \sum_l \sum_r \beta_{jl} \beta_{kr} p_{lr}.$$

Всякий n-мерный тензор можно в данной системе координат выразить либо через составляющие —

$$\hat{\Pi} = \sum_k^n \vec{i}_k \vec{p}_k, \tag{4}$$

либо в виде n-рядной матрицы компонентов —

$$\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Компоненты n-мерного тензора образуют n инвариантов, каждый из которых является суммой всевозможных диагональных миноров различных порядков $K = 1, 2, \ldots, n$.

В частном случае трехмерного пространства тензор характеризуется тремя составляющими:

$$\hat{\Pi}=(\vec{i}_1,\vec{p}_1)+(\vec{i}_2,\vec{p}_2)+(\vec{i}_3,\vec{p}_3) \text{ или } \hat{\Pi}=(\vec{p}_x,\vec{i})+(\vec{p}_y,\vec{j})+(\vec{p}_z,\vec{k})$$

либо девятью скалярными компонентами:

$$\hat{\Pi}=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}\equiv\begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Vmatrix}.$$

Ясно, что у трехмерного тензора имеется, вообще говоря, три взаимно перпендикулярных главных направления и три главных значения λ_{I}, λ_{II}, λ_{III}. Симметричному неособенному тензору в трехмерном пространстве соответствует центральная поверхность второго порядка (в системе главных осей):

$$\frac{x^2}{1/\lambda_{\mathrm{I}}}+\frac{y^2}{1/\lambda_{\mathrm{II}}}+\frac{z^2}{1/\lambda_{\mathrm{III}}}=1. \qquad (6)$$

При этом в зависимости от знаков собственных значений λ_{I}, λ_{II}, λ_{III} эта поверхность принимает следующие формы:

1) $\lambda_{\mathrm{I}}>0$, $\lambda_{\mathrm{II}}>0$, $\lambda_{\mathrm{III}}>0$ — эллипсоид,
2) $\lambda_{\mathrm{I}}>0$, $\lambda_{\mathrm{II}}>0$, $\lambda_{\mathrm{III}}<0$ — однополостный гиперболоид,
3) $\lambda_{\mathrm{I}}>0$, $\lambda_{\mathrm{II}}<0$, $\lambda_{\mathrm{III}}<0$ — двухполостный гиперболоид,
4) $\lambda_{\mathrm{I}}<0$, $\lambda_{\mathrm{II}}<0$, $\lambda_{\mathrm{III}}<0$ — мнимый эллипсоид.

На практике чаще всего встречается первый случай. Поэтому принято поверхность (6) называть *тензорным эллипсоидом* (хотя в тех случаях, когда реализуются условия 2) и 3), она будет гиперболоидом).

Инвариантами трехмерного тензора являются:

$$I_1=p_{11}+p_{22}+p_{33}=\lambda_{\mathrm{I}}+\lambda_{\mathrm{II}}+\lambda_{\mathrm{III}}, \qquad (7)$$

$$I_2=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}=\lambda_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{II}}+\lambda_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{III}}+\lambda_{\mathrm{II}}\lambda_{\mathrm{III}}, \qquad (7')$$

$$I_3=\det\hat{\Pi}=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}=\lambda_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{II}}\lambda_{\mathrm{III}}. \qquad (7'')$$

Перейдем теперь к рассмотрению примеров различных физических тензорных полей в реальном трехмерном пространстве.