

§ 2. Тензор деформации

Прежде всего подчеркнем, что при деформации различные участки тела, вообще говоря, деформируются неодинаково (*неоднородная деформация*). Поэтому следует говорить о деформации в данной точке, имея в виду изменение объема и формы элемента тела в окрестности этой точки.

Покажем далее, что ни векторные, ни тем более скалярные величины не могут быть использованы в качестве меры деформированности элемента тела, для этого необходимы более сложные, тензорные величины.

Действительно, пусть тело, первоначальная форма которого показана на рисунке 8, а, после деформации принял форму, показанную на рисунке 8, б. Для математического описания этой деформации сопоставим каждой точке тела вектор смещения $\vec{U} = \vec{r}' - \vec{r}$ (где \vec{r}' и \vec{r} — радиус-векторы точки после и до ее перемещения).

Ясно, что при деформации мы имеем дело с векторным полем $\vec{U}(\vec{r})$, область которого совпадает с первоначальными размерами тела (рис. 9). Зная поле вектора смещения $\vec{U}(\vec{r})$, мы можем полностью определить деформацию тела. Однако каждый отдельно взятый для данной точки вектор \vec{U} никакой деформации характеризовать не может. Ведь

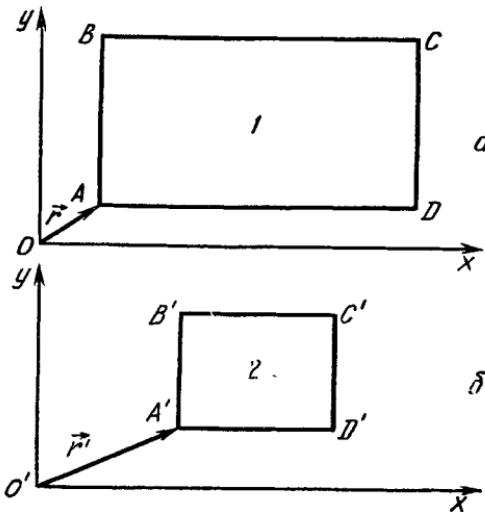


Рис. 8

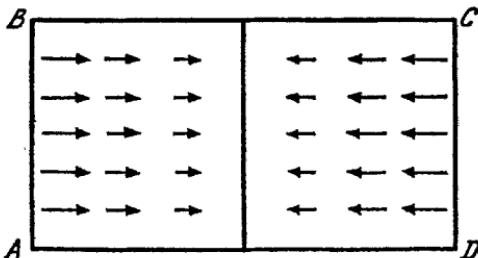


Рис. 9

если и соседние точки сместились на такую же величину \vec{U} , т. е. если в окрестности данной точки $\vec{U} = \text{const}$, то рассматриваемый элемент тела вообще не деформирован, хотя вектор смещения \vec{U} не равен 0.

Отсюда ясно, что степень деформации в каждой точке тела определяется не вектором смещения \vec{U} в данной точке, а относительным изменением этого вектора в ее окрестности. Может поэтому возникнуть предположение, что искомой характеристикой является производная векторной функции $\vec{U}(\vec{r})$, представляющая собой тензор $\frac{d\vec{U}}{dr}$. Легко,

однако, убедиться, что производная $\frac{d\vec{U}}{dr}$ не всегда характеризует деформацию. Действительно, если, например, тело целиком повернулось на некоторый угол, то вектор смещения \vec{U} не равен нулю и изменяется от точки к точке; при этом тензор $\frac{d\vec{U}}{dr}$ заведомо отличен от нуля, хотя никакого изменения объема или формы не произошло. Чтобы стало яснее, в чем дело, разложим тензор-производную на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{d\vec{U}}{dr} = \left(\frac{d\vec{U}}{dr} \right)_S + \left(\frac{d\vec{U}}{dr} \right)_A .$$

Ниже будет показано, что антисимметричная часть тензора-производной совпадает с так называемым *ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\vec{U}(\vec{r})$ и характеризует поворот

элемента объема в пространстве. Симметричная же часть производной $\frac{d\vec{U}}{dr}$ полностью определяется деформацией тела и называется тензором деформации:

$$\hat{U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Как уже отмечалось, каждому симметричному тензору можно сопоставить определенный эллипсоид.

В главе I был указан общий метод нахождения эллипса, соответствующего двумерному тензору. Оказывается, однако, что для характеристики деформации удобнее геометрически интерпретировать тензор \hat{U} эллипсом деформации, который строится иначе. Способ построения последнего мы изложим на примере деформации плоского сечения тела.

Окружим рассматриваемую точку плоскости окружностью единичного радиуса; ее уравнение в координатах, как известно, имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$, или в векторной форме $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$. В результате деформации, характеризуемой тензором \hat{U} , каждый радиус-вектор \vec{r} преобразуется в новый вектор $\vec{r}' = (\hat{U}, \vec{r})$, а указанная окружность — в новую линию, которая представляет собой геометрическое место концов радиус-векторов \vec{r}' . Поскольку \hat{U} является линейным оператором (аффинором), то ясно, что уравнение преобразованной линии также будет второй степени. Окружность деформируется в другую линию второго порядка. Более того, можно заведомо утверждать, что эта линия есть эллипс, ибо, как это ясно из физического смысла, главные значения λ_1 и λ_{11} тензора деформации всегда величины положительные (при $\lambda < 0$ тело должно было бы в результате деформации «вывернуться наизнанку»). Естественно назвать эллипс, полученный из окружности в результате деформации *эллипсом деформации*. Определим вид этого эллипса. Полагая как обычно, что симметричный тензор \hat{U} неособенный, можно из равенства $\vec{r}' = (\hat{U}, \vec{r})$ выра-

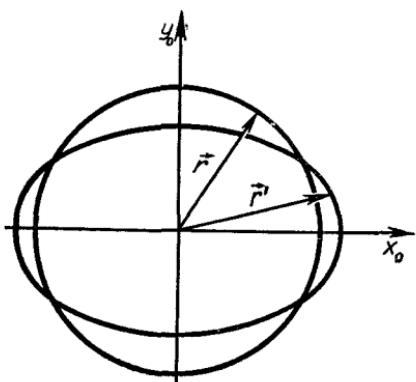


Рис. 10

зить \vec{r} через \vec{r}' :
 $\vec{r}(\hat{U}^{-1}, \vec{r}')$,
где \hat{U}^{-1} — симметричный тензор, обратный \hat{U} , т. е.
 $\hat{U}^{-1}\hat{U}=\hat{I}$. Подставляя теперь значение \vec{r} в уравнение окружности $(\vec{r}, \vec{r}) = 1$, получим:
 $(\hat{U}^{-1}, \vec{r}') \cdot (\vec{U}^{-1}, \vec{r}') = 1$.

Так как для симметричного тензора порядок сомножителей безразличен, т. е.

$(\hat{U}^{-1}, \vec{r}) = (\vec{r}, \hat{U}^{-1})$, то приходим к следующему уравнению для эллипса деформации:

$$(\vec{r}', \hat{U}^{-2} \vec{r}') = 1, \quad (9)$$

где \vec{r}' — текущий радиус-вектор точек кривой. Неоднократно уже отмечалось, что проще всего выглядит уравнение эллипса в системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора. Несложно убедиться из геометрических соображений, что при возведении в степень тензора его главные оси не меняются, а главные значения степени тензора равны степеням главных значений тензора. Поэтому приведенный к главным осям тензор \hat{U}^{-2} принимает вид:

$$\hat{U}^{-2} = \begin{vmatrix} 1/\lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2^2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в результате скалярного умножения \hat{U}^{-2} на радиус-вектор $\vec{r}' = xi + yj$ получается новый вектор \vec{r}'' :

$$\vec{r}'' = (\hat{U}^{-2}, \vec{r}') = \frac{x}{\lambda_1^2} \vec{i} + \frac{y}{\lambda_2^2} \vec{j}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем слева скалярное произведение векторов (\vec{r}', \vec{r}'') , так что уравнение кривой принимает вид:

$$\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 1. \quad (11)$$

Это и есть уравнение эллипса деформации. Его оси совпадают с главными осями тензора \hat{U} , т. е. с направлениями наибольшего и наименьшего растяжений (или сжатий, если

$\lambda < 1$). Зная эллипс деформации, можно весьма просто определить, в какой вектор \vec{r}' превращается любой вектор \vec{r} (рис. 10). Подчеркнем, что для характеристики деформации всего тела нужно знать множество эллипсов в каждой точке тела (поле тензорных эллипсов).

§ 3. Тензор напряжений

В недеформируемом теле отсутствуют силы взаимодействия между отдельными частями тела. Если же к этому телу приложить внешние силы, то оно будет деформироваться — молекулы тела будут смещаться до тех пор, пока возникшие внутри тела силы упругости, пропорциональные по закону Гука деформации и стремящиеся возвратить тело к первоначальному состоянию, не станут равными внешним силам.

Во всяком деформированном теле между соседними его частями существуют силы, которые действуют только по поверхности раздела, так как они порождены близкодействующим молекулярным взаимодействием. Если внутри деформированного (например, растянутого) тела провести некоторую площадку PQ (рис. 11, *a*), то на верхнюю часть I со стороны нижней части II действует некоторая сила \vec{f} , зависящая при данной деформации от площади S этой площадки. Поэтому принято рассматривать отношение силы \vec{f} к площади S . Это отношение σ называют *напряжением*:

$$\sigma = \frac{\vec{f}}{S}.$$

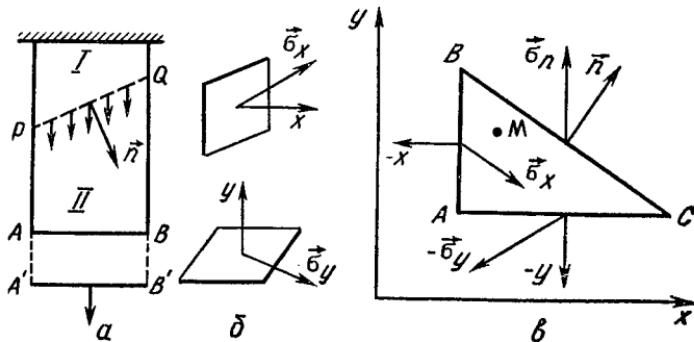


Рис. 11