

$\lambda < 1$ ). Зная эллипс деформации, можно весьма просто определить, в какой вектор  $\vec{r}'$  превращается любой вектор  $\vec{r}$  (рис. 10). Подчеркнем, что для характеристики деформации всего тела нужно знать множество эллипсов в каждой точке тела (поле тензорных эллипсов).

### § 3. Тензор напряжений

В недеформируемом теле отсутствуют силы взаимодействия между отдельными частями тела. Если же к этому телу приложить внешние силы, то оно будет деформироваться — молекулы тела будут смещаться до тех пор, пока возникшие внутри тела силы упругости, пропорциональные по закону Гука деформации и стремящиеся возвратить тело к первоначальному состоянию, не станут равными внешним силам.

Во всяком деформированном теле между соседними его частями существуют силы, которые действуют только по поверхности раздела, так как они порождены близкодействующим молекулярным взаимодействием. Если внутри деформированного (например, растянутого) тела провести некоторую площадку  $PQ$  (рис. 11, *a*), то на верхнюю часть I со стороны нижней части II действует некоторая сила  $\vec{f}$ , зависящая при данной деформации от площади  $S$  этой площадки. Поэтому принято рассматривать отношение силы  $\vec{f}$  к площади  $S$ . Это отношение  $\sigma$  называют *напряжением*:

$$\sigma = \frac{\vec{f}}{S}.$$

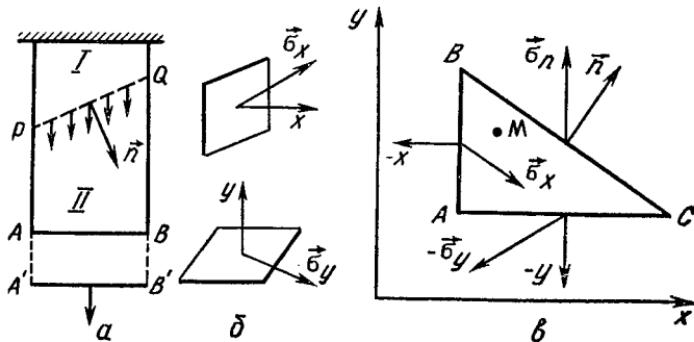


Рис. 11

Ясно, что вектор напряжения  $\vec{\sigma}$  не обязательно перпендикулярен площадке и зависит как от точки, выбранной внутри тела, так и от ориентации площадки. Если мы рассматриваем определенную точку, то, говоря о напряжении в ней, необходимо указать направление нормали, характеризующей ориентацию площадки, и отмечать это соответствующим индексом. Так,  $\vec{\sigma}_x$  — напряжение для площадки, нормалью которой является ось  $X$ ,  $\vec{\sigma}_y$  — напряжение для площадки, перпендикулярной оси  $Y$  и т. д. (рис. 11, б).

Поскольку через точку внутри тела можно провести бесчисленное множество по-разному ориентированных площадок, то может показаться, что для полного знания напряжений в этой точке нужно определить бесконечное количество векторов  $\vec{\sigma}$  для всех площадок. Оказывается, однако, что напряжения в каждой точке образуют тензор и поэтому достаточно знать три напряжения  $\vec{\sigma}_x$ ,  $\vec{\sigma}_y$ ,  $\vec{\sigma}_z$  по трем взаимно перпендикулярным площадкам, чтобы можно было вычислить напряжение  $\vec{\sigma}_n$  для проведенной через эту точку произвольно ориентированной площадки с нормалью  $n$ .

Итак, покажем, что напряжение представляет собой тензорную величину. Для простоты рассмотрим плоское деформированное тело. Вырежем мысленно вокруг рассматриваемой точки  $M$  внутри тела бесконечно малый треугольник  $ABC$  (рис. 11, в). Поскольку этот треугольник, как и все тело, неподвижен, то сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. На грань  $AB$  действует сила, равная  $-\vec{\sigma}_x \cdot |AB|$ . Здесь знак минус объясняется тем, что нормаль к площадке  $AB$  направлена в сторону, противоположную оси  $X$ . Аналогично на грань  $AC$  действует сила  $-\vec{\sigma}_y \cdot |AC|$ , и, наконец, на грань  $BC$  — сила  $+\vec{\sigma}_n \cdot |BC|$ . Таким образом,

$$\vec{\sigma}_n \cdot |BC| - \vec{\sigma}_x \cdot |AB| - \vec{\sigma}_y \cdot |AC| = 0.$$

Но, как ясно из рисунка,  $|AB| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, x)$  и  $|AC| = |BC| \cdot \cos(\hat{n}, y)$ . Подставляя значения  $|AB|$  и  $|AC|$  в предыдущее равенство и производя сокращение, получим:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x \cos(\hat{n}, x) + \vec{\sigma}_y \cos(\hat{n}, y). \quad (12)$$

Так как направление площадки  $BC$  и нормали  $\vec{n}$  выбрано произвольно, то согласно (12) оказываются выполненными условия того, что векторы  $\vec{\sigma}_x$  и  $\vec{\sigma}_y$  являются составляющими тензора  $\hat{\sigma}$  (см. соотношение 10 в главе I). Не должно смузгать то обстоятельство, что векторы  $\vec{\sigma}_x$ ,  $\vec{\sigma}_y$  и  $\vec{\sigma}_n$  построены в разных точках — ведь треугольник  $ABC$  бесконечно мал.

Легко доказать, что тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  является симметричным тензором. Диагональные компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  называются *нормальными*, а недиагональные —  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  — *сдвиговыми*. Если тензор привести к главным осям, то он примет диагональный вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Главные значения тензора  $\lambda_I = \sigma_{11}$ ,  $\lambda_{II} = \sigma_{22}$ ,  $\lambda_{III} = \sigma_{33}$  называют главными напряжениями. Уравнение поверхности напряжений имеет вид:

$$\lambda_I x^2 + \lambda_{II} y^2 + \lambda_{III} z^2 = 1.$$

Так как значения  $\lambda_I$ ,  $\lambda_{II}$ ,  $\lambda_{III}$  могут в этом случае быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность представляет собой либо эллипсоид, либо гиперболоид (одно- или двухполостный).

#### § 4. Тензор инерции

Важной характеристикой механических свойств твердого тела по отношению к врачающему движению является его тензор инерции  $\hat{I}$ . Известно, что моментом инерции тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс всех точек его на квадрат расстояния их от этой оси:

$$I = \sum_k m_k r_k^2. \quad (14)$$

Момент инерции служит мерой инертности тела при вращательном движении, т. е. играет такую же роль, как масса тела в поступательном движении. Формулы механики вращательного движения аналогичны соответствующим формулам поступательного движения. Так, кинети-