Так как направление площадки BC и нормали $\vec{n}$ выбрано произвольно, то согласно (12) оказываются выполненными условия того, что $\vec{\sigma}_x$ и $\vec{\sigma}_y$ являются составляющими тензора $\hat{\sigma}$ (см. соотношение 10 в главе I). Не должно смущать то обстоятельство, что векторы $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ и $\vec{\sigma}_n$ построены в разных точках — ведь треугольник ABC бесконечно мал.

Легко доказать, что тензор напряжений $\hat{\sigma}$ является симметричным тензором. Диагональные компоненты σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} называются *нормальными*, а недиагональные — σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yz} — *сдвиговыми*. Если тензор привести к главным осям, то он примет диагональный вид:

$$\hat{\sigma} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

Главные значения тензора $\lambda_{\mathrm{I}} = \sigma_{11}$, $\lambda_{\mathrm{II}} = \sigma_{22}$, $\lambda_{\mathrm{III}} = \sigma_{33}$ называют главными напряжениями. Уравнение поверхности напряжений имеет вид:

$$\lambda_{\mathrm{I}} x^2 + \lambda_{\mathrm{II}} y^2 + \lambda_{\mathrm{III}} z^2 = 1.$$

Так как значения λ_{I}, λ_{II}, λ_{III} могут в этом случае быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность представляет собой либо эллипсоид, либо гиперболоид (одно- или двухполостный).

§ 4. Тензор инерции

Важной характеристикой механических свойств твердого тела по отношению к вращательному движению является его тензор инерции $\hat{I}$. Известно, что моментом инерции тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс всех точек его на квадрат расстояния их от этой оси:

$$I = \sum_k m_k r_k^2. \qquad (14)$$

Момент инерции служит мерой инертности тела при вращательном движении, т. е. играет такую же роль, как масса тела в поступательном движении. Формулы механики вращательного движения аналогичны соответствующим формулам поступательного движения. Так, кинети-

ческая энергия тела при его вращении вокруг некоторой оси с угловой скоростью равна:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I\omega^2. \qquad (14')$$

Уравнение динамики вращательного движения подобно второму закону Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M,$$

где M — момент силы. Однако, несмотря на такое сходство, между динамикой поступательного движения и динамикой вращательного движения имеется и существенное различие: в то время как масса тела m есть скалярная величина, момент инерции I является величиной значительно более сложной природы. Действительно, для одного и того же тела момент инерции может принимать бесчисленное количество значений в зависимости от выбора оси. Разберем этот вопрос подробнее.

Произвольное движение тела всегда можно представить как сумму поступательного движения некоторой точки, выбираемой за начало координат, и вращения тела вокруг начала координат. При этом выражение для кинетической энергии выглядит наиболее просто, если поместить начало вращающейся системы координат в центр инерции тела.

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о моментах инерции тела относительно осей, проходящих через центр инерции. Но ведь и таких центральных осей можно провести по различным направлениям бесчисленное множество, а значит, существует такое же множество соответствующих (центральных) моментов инерции.

Мы, однако, покажем, что момент инерции представляет собой симметричный тензор и поэтому достаточно знать шесть его скалярных компонентов в некоторой системе координат, чтобы определить его компоненты для любой другой тройки взаимно перпендикулярных осей.

Общее выражение для кинетической энергии системы материальных точек имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2. \qquad (15)$$

Абсолютную скорость точки можно представить как сумму скорости центра инерции и скорости, обусловленной вращением тела вокруг него:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_k]. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получаем:

$$W = \frac{1}{2} v_0^2 \sum_k m_k + \sum_k m_k (\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2. \tag{15'}$$

Так как $\sum_k m_k$ равна массе тела m и по правилам смешанного произведения

$$(\vec{v}_0, [\vec{\omega}, \vec{r}_k]) = (\vec{r}_k, [\vec{v}_0, \vec{\omega}]),$$

то второе слагаемое в (15′) можно представить в следующем виде:

$$[\vec{v}_0, \vec{\omega}] \sum_k m_k \vec{r}_k.$$

Из механики известно, что радиус-вектор центра инерции определяется по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_k m_k \vec{r}_k.$$

Но так как начало координат мы совместили с центром инерции, то $\vec{r}_c = 0$, или $\sum_k m_k \vec{r}_k = 0$. Поэтому второе слагаемое в (15′) пропадает.

Итак,

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k [\vec{\omega}, \vec{r}_k]^2.$$

Из векторной алгебры известно, что

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2.$$

Поэтому

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k (\omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_k)^2). \tag{17}$$

Формула (17) показывает, что кинетическая энергия тела состоит из энергии его поступательного движения $W_{\text{пост}} = \frac{1}{2} m v_0^2$ и кинетической энергии, зависящей от угловой

скорости ω энергии вращательного движения:

$$W_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \{\omega^2 r_k^2 - (\vec{\omega}\vec{r}_k)^2\}.$$

Рассмотрим последнее выражение подробнее. Поскольку

$$\omega^2 r_k^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \text{ и } (\vec{\omega}\vec{r}_k)^2 = (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2,$$

то для кинетической энергии вращательного движения имеем следующее равенство:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \sum_k m_k \{(y_k^2 + z_k^2)\omega_x^2 + (x_k^2 + z_k^2)\omega_y^2 + (x_k^2 + y_k^2)\omega_z^2 - 2(x_k y_k \omega_x \omega_y + x_k z_k \omega_x \omega_z + y_k z_k \omega_y \omega_z)\}. \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что в частном случае, когда ось вращения направлена вдоль одной из координатных осей, например вдоль оси X, выражение (18) упрощается и принимает вид:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \omega_x^2 \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2,$$

где I_x — момент инерции относительно X. Это наводит на мысль, что если ввести симметричный тензор, компоненты которого образуют матрицу

$$\hat{I} = \begin{Vmatrix} \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k x_k y_k & -\sum m_k x_k z_k \\ -\sum m_k y_k x_k & \sum m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum m_k y_k z_k \\ -\sum m_k z_k x_k & -\sum m_k z_k y_k & \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{Vmatrix}, \quad (19)$$

то можно будет выражение (18) записать кратко так:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\omega}). \quad (20)$$

Эта формула является обобщением равенства (14′), и поэтому $\hat{I}$ естественно назвать *тензором инерции*.

Прежде чем перейти к подробному анализу свойств тензора инерции, покажем, что он действительно является тензором. Для этого рассмотрим матрицу:

$$R = \begin{Vmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{Vmatrix}.$$

Она, очевидно, представляет собой разность двух тензоров: единичного тензора $\hat{I}$, умноженного на квадрат радиус-вектора $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, и симметричной диады $\{\vec{r}, \vec{r}\}$. Следовательно, по правилам тензорной алгебры величина R представляет собой тензор:

$$\hat{R} = r^2\hat{I} - \{\vec{r}, \vec{r}\}.$$

Несложно проверить далее, что матрица $\hat{I}$ является суммой произведений масс (скаляров) каждой точки тела на тензоры $\hat{R}_k$ для этих точек, т. е. $\hat{I} = \sum_k m_k \hat{R}_k$. Отсюда вытекает, что I есть тензорная величина.

Перейдем теперь к анализу матрицы компонентов (19), характеризующей тензор инерции $\hat{I}$. Его диагональные элементы I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} являются моментами относительно осей x, y и z. Недиагональные элементы I_{xy}, I_{xz} и I_{yz} называют полярными или центробежными моментами инерции, однако они не имеют простого физического смысла.

Тензор инерции, как и всякий симметричный тензор, имеет три взаимно перпендикулярные главные оси инерции, которым соответствуют главные моменты инерции I_{11}, I_{22}, I_{33}.

В системе главных осей тензор инерции принимает диагональный вид:

$$\hat{I} = \begin{Vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{Vmatrix}.$$

При этом вращательная кинетическая энергия выражается весьма просто:

$$W_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\left(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2 + I_{33}\omega_3^2\right).$$

Симметричному тензору $\hat{I}$ сопоставляют эллипсоид инерции $(\vec{r}, \hat{I}\vec{r}) = 1$, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 = 1. \qquad (21)$$

(Это уравнение всегда определяет именно эллипсоид, ибо, как ясно из физических соображений, моменты инерции I_{11}, I_{22} и I_{33} не могут быть отрицательными.)

Вид эллипсоида инерции зависит от распределения масс в теле; он отсекает на произвольной оси U отрезки, равные $1/\sqrt{I_{uu}}$ (где I_{uu} — момент инерции относительно оси U).

Если тело обладает определенной симметрией в распределении масс, то такой же симметрией, очевидно, должен обладать и эллипсоид инерции. Это обстоятельство весьма облегчает нахождение вида эллипсоида инерции.

Допустим, что тело обладает плоскостью симметрии, совпадающей с координатной плоскостью YOZ. Тогда ясно, что ось X является одной из главных осей инерции, а две другие лежат в указанной плоскости. Если тело обладает осью симметрии, то она является также осью эллипсоида и, следовательно, главной осью инерции. Легко видеть, что если порядок оси симметрии, скажем оси Z, выше второго, то в качестве остальных двух главных осей можно взять любые два взаимно перпендикулярных направления в плоскости XOY. При этом моменты I_{xx} и I_{yy} равны между собой. Действительно, если порядок симметрии оси равен 4 (рис. 12, *а*), то при повороте параллелепипеда на угол 90° эллипсоид инерции не должен измениться — он является эллипсоидом вращения. Отсюда следует равенство двух его полуосей (рис. 12, *б*).

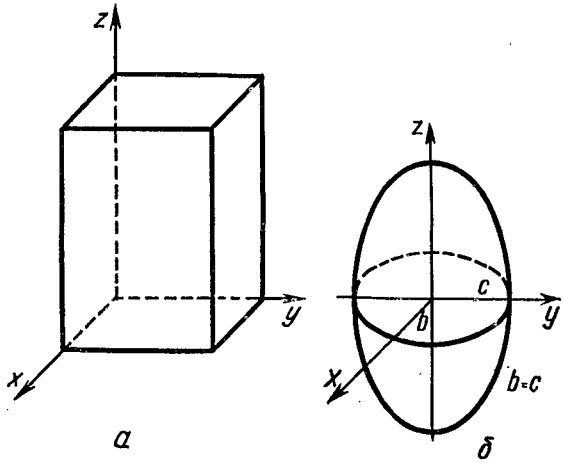

Рис. 12

С помощью таких же рассуждений нетрудно показать, что для куба эллипсоид инерции имеет форму шара (рис. 13).

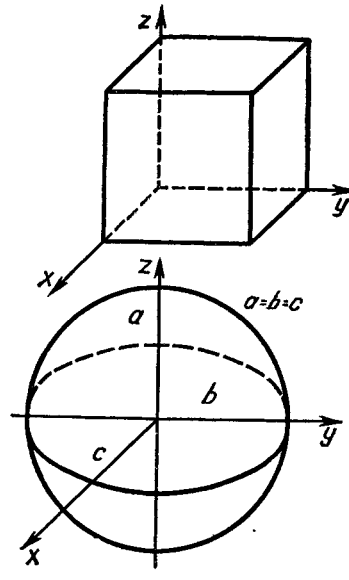

Рис. 13

§ 5. Скалярный и векторный инварианты тензора-производной векторного поля

Как мы знаем, полной дифференциальной характеристикой векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ является тензорное поле $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}(\vec{r})$. Но оказывается, что быстроту изменения векторной функции $\vec{a}$ можно еще определить (хотя и не так строго) с помощью инвариантов тензора $\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}}$. Тем самым можно вместо тензорных использовать более простые величины — скалярные и векторные.

Математический аппарат описания аналитических свойств векторных полей получил название векторного анализа. Запишем матрицу компонентов тензора-производной:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{Vmatrix}.$$

Первый инвариант этого тензора, равный сумме его диагональных элементов, называется *дивергенцией* (расходимостью) векторной функции $\vec{a}_{(x,\,y,\,z)}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (22)$$

Чтобы познакомиться со вторым используемым в вектор-