

С помощью таких же рассуждений нетрудно показать, что для куба эллипсоид инерции имеет форму шара (рис. 13).

### § 5. Скалярный и векторный инварианты тензора-производной векторного поля

Как мы знаем, полной дифференциальной характеристикой векторного поля  $\vec{a}(r)$  является тензорное поле  $\frac{d\vec{a}}{dr}(r)$ . Но оказывается, что быстроту изменения векторной функции  $\vec{a}$  можно еще определить (хотя и не так строго) с помощью инвариантов тензора  $\frac{d\vec{a}}{dr}$ . Тем самым можно

вместо тензорных использовать более простые величины — скалярные и векторные.

Математический аппарат описания аналитических свойств векторных полей получил название векторного анализа. Запишем матрицу компонентов тензора-производной:

$$\frac{d\vec{a}}{dr} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Первый инвариант этого тензора, равный сумме его диагональных элементов, называется *дивергенцией* (расходностью) векторной функции  $\vec{a}_{(x, y, z)}$ :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (22)$$

Чтобы познакомиться со вторым используемым в вектор-

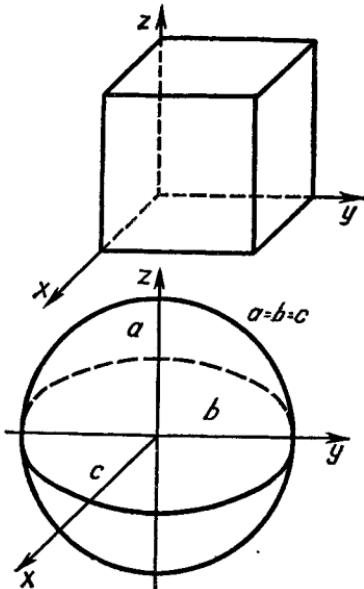


Рис. 13

ном анализе инвариантом тензора  $\frac{\overrightarrow{da}}{dr}$ , разложим этот тензор на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{\overrightarrow{da}}{dr} = \hat{S} + \hat{A}.$$

Выпишем в явном виде матрицу антисимметричного тензора:

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) & 0 & \left( \frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) & 0 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Будучи антисимметричным, тензор  $\hat{A}$  определяется по существу тремя скалярными компонентами. Поскольку и векторные величины в трехмерном пространстве характеризуются тремя компонентами, то возникает естественный вопрос: нельзя ли антисимметричной части тензора-производной сопоставить некий вектор? Что бы это было возможно, компоненты тензора и компоненты вектора должны при повороте осей координат меняться одинаковым образом. Оказывается, что такое явление действительно имеет место.

Итак, антисимметричному тензору  $\hat{A}$  можно сопоставить соответствующий вектор  $\vec{\omega}$ , называемый *ротором* (или *вихрем*) векторного поля  $\vec{a} = \text{rot } \vec{a}$ ; его компоненты определяются так:

$$\omega_x = \frac{\partial a^z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (24)$$

При этом матрица  $\hat{A}$  принимает вид:

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вектор

$$\text{rot } \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (25)$$

эквивалентен антисимметричному тензору  $\hat{A}$  и представляет собой векторный инвариант тензора-производной.

Совокупность двух величин — скаляра  $\operatorname{div} \vec{a}$  и вектора  $\operatorname{rot} \vec{a}$ , являющихся инвариантами тензора-производной  $\frac{\vec{da}}{dr}$ , может служить дифференциальной характеристикой

векторного поля  $\vec{a}(r)$ . Каждая из этих величин имеет непосредственный физический и геометрический смысл, который мы выясним ниже.

Однако сначала необходимо ответить на следующий вопрос: как могут скаляр  $\operatorname{div} \vec{a}$  и вектор  $\operatorname{rot} \vec{a}$ , определяемые в совокупности четырьмя числами, характеризовать векторное поле  $\vec{a}(r)$ , т. е. выполнять ту же задачу, что и тензор  $\frac{\vec{da}}{dr}$ , определяемый девятью скалярными числами? Конечно,  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{rot} \vec{a}$ , называемые иногда скалярной и векторной «производными» функции  $\vec{a}(r)$ , не эквивалентны в точности тензору-производной  $\frac{\vec{da}}{dr}$ . В то

время как тензор-производная однозначно и полностью характеризует в окрестности рассматриваемой точки пространства быстроту изменения векторной переменной  $\vec{a}$ , дивергенция и ротор этой функции описывают ее поведение неполно и неоднозначно. Это значит, что могут существовать две различные векторные функции  $\vec{a}(r)$  и  $\vec{b}(r)$ , у которых  $\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \vec{b}$  и  $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$ , хотя  $\frac{\vec{da}}{dr} \neq \frac{\vec{db}}{dr}$ . Однако если  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{rot} \vec{a}$  известны в каждой точке

поля и на его границах, то сама векторная функция  $\vec{a}(r)$  определяется однозначно.

## § 6. Физический и аналитический смысл дивергенции векторного поля

Пусть в некоторой области задано векторное поле скоростей текущей жидкости  $\vec{v}(r)$ . Легко видеть, что через произвольную малую площадку  $dS$  за одну секунду про-