Легко убедиться с помощью формулы Гаусса—Остроградского, что в таком поле поток вектора $\vec{a}$ через произвольное поперечное сечение трубки есть величина постоянная:

$$\iint\limits_{S_2} a_n\,dS = \iint\limits_{S_1} a_n\,dS = \text{const}.$$

Если же поле не является вихревым ($\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$), но в окрестности некоторой точки $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, тогда для двух близких сечений ΔS_1 и ΔS_2 тонкой трубки, охватывающей эту точку, имеем (с точностью до малых высшего порядка):

$$a_n^{(2)} \cdot \Delta S_2 = a_n^{(1)} \cdot \Delta S_1.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем тоньше векторная трубка и короче расстояние между рассматриваемыми сечениями. Таким образом, если в некоторой точке поля $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то поток вектора через соседние сечения тонкой трубки неизменен: $dN = a_n\,dS = \text{const}$. Вблизи же тех точек, где $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$, поток dN вдоль узкой векторной трубки увеличивается (при $\operatorname{div}\vec{a} > 0$) или уменьшается (при $\operatorname{div}\vec{a} < 0$).

Другими словами, если сечение векторной трубки постоянно, то численное значение $\operatorname{div}\vec{a}$ в данной точке M поля характеризует быстроту изменения длины вектора $\vec{a}$ вдоль векторной линии, проходящей через M.

§ 7. Физический и аналитический смысл ротора векторного поля

Прежде всего заметим, что определяемый формулой (25) вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$ можно еще представить в виде символического определителя третьего порядка:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Для выяснения физического смысла ротора рассмотрим сперва плоские векторные поля $\vec{v}(x,y)$, где $\vec{v}$ — линейная

скорость частиц сплошной среды. В этом случае v_z и производные по z обращаются в нуль и мы получаем:

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ a_x & a_y & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (30')$$

Отсюда видно, что ротор в каждой точке направлен перпендикулярно плоскости векторного поля XOY.

Положим вначале, что движение совершает плоское твердое тело (тонкая пластина). Как известно из механики, скорость его перемещения всегда можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+[\vec{\omega},\ \vec{r}],$$

где v_0 — скорость центра инерции тела (скорость поступательного движения тела), $[\vec{\omega},\ \vec{r}]$ — линейная скорость вращения вокруг центра инерции произвольной точки тела, радиус-вектор которой равен $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, направленный по оси вращения, одинаковый для всех точек тела ($\vec{\omega}=\text{const}$). Так как поступательная скорость у всех точек твердого тела одинакова ($\vec{v}_0=\text{const}$), то ясно, что $\operatorname{rot}\vec{v}_0=0$. Следовательно,

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\operatorname{rot}[\vec{\omega},\ \vec{r}].$$

Выберем оси координат таким образом, чтобы ось вращения тела совпала с OZ, а плоскость XOY — с плоскостью движения пластины, тогда $\omega_x=\omega_y=0$ $\omega_z=\omega$, а точки тела характеризуются только двумя координатами (x, y). Поэтому согласно правилам векторного умножения векторов:

$$[\omega\cdot\vec{r}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & 0\end{vmatrix}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}.$$

Подставляя в формулу (30′) компоненты вектора $[\vec{\omega},\ \vec{r}]$, получим:

$$\operatorname{rot}[\vec{\omega},\ \vec{r}]=2\omega\vec{k},$$

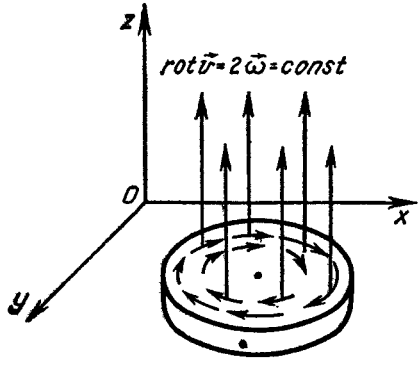

Рис. 18

или

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\omega}. \qquad (31)$$

Ротор линейной скорости твердого тела есть вектор, равный удвоенной угловой скорости его вращения.

Поскольку у твердого тела угловая скорость $\vec{\omega}$ постоянна, то векторное поле $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ также является постоянным (рис. 18).

Знание ротора векторного поля весьма важно для определения циркуляции вектора по произвольному замкнутому контуру.

Пусть в поле $\vec{a}(\vec{r})$ задана направленная замкнутая линия L (направление обхода линии принято таким, чтобы ограничиваемая этой линией поверхность оставалась слева). Тогда криволинейный интеграл вектора по линии L называется циркуляцией Г:

$$\Gamma = \oint_L a_l\,dl = \oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \oint_L (a_x\,dx + a_y dy + a_z dz). \qquad (32)$$

Циркуляция обладает свойством аддитивности. Это свойство состоит в следующем. Положим, что контур L, по которому определяется циркуляция Г, ограничивает поверхность S. Разобьем последнюю на части S_1 и S_2, ограничиваемые контурами L_1 и L_2 (рис. 19). Поскольку интегралы по внутренним участкам этих контуров одинаковы

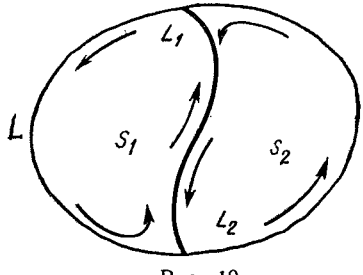

Рис. 19

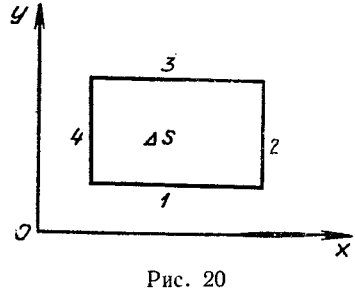

Рис. 20

по модулям, но имеют противоположные знаки, то

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Таким образом, циркуляция, «порожденная» на поверхности S, равна сумме циркуляций Γ_1 и Γ_2, «порожденных» частями этой поверхности S_1 и S_2. Учитывая это, можно ввести понятие «плотности порождения циркуляции» $\frac{d\Gamma}{dS}$, отнесенной к единице площади поверхности.

Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(x, y)$. Выберем в нем бесконечно малый прямоугольник (рис. 20) с площадью ΔS и вычислим циркуляцию $\Delta\Gamma$ по его контуру (ΔL). Очевидно,

$$\Delta\Gamma = \int\limits_{\Delta L} (a_x\,dx + a_y\,dy) = \int\limits_{(1)} a_x\,dx + \int\limits_{(2)} a_y\,dy + \int\limits_{(3)} a_x\,dx + \int\limits_{(4)} a_y\,dy.$$

Можно показать, что с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy = \mathrm{rot}_n\,\vec{a}\cdot\Delta S,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к площадке ΔS. В общем случае трехмерного поля и произвольно ориентированной площадки циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру определяется такой же формулой, поэтому всегда

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \mathrm{rot}_n\,\vec{a}, \tag{32}$$

т. е. $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ **есть предел отношения циркуляции** $\oint\limits_{\Delta L} a_l\,dl$ **по нормальному малому контуру** ΔL **к величине площадки** ΔS, **ограниченной этим контуром при** $\Delta S \to 0$.

Если в пространстве задана конечная замкнутая кривая L, ограничивающая поверхность S, то получаем интегральное равенство, называемое *теоремой Стокса*:

$$\oint\limits_{L} a_l\,dl = \iint\limits_{S} \mathrm{rot}_n\,\vec{a}\cdot dS. \tag{33}$$

Циркуляция переменного вектора $\vec{a}$ **по произвольной замкнутой кривой** L **равна потоку ротора этого вектора через поверхность** S, **опирающуюся на контур** L.

Для выяснения аналитического смысла ротора как векторной производной векторного поля $\vec{u}(\vec{r})$ (для нагляд-

ности положим, что $\vec{u}$ — вектор смещения точек сплошной среды) поступим следующим образом. Рассмотрим тонкую векторную трубку, внутри которой находится точка M, и проведем через эту точку нормальное сечение ΔS, которое с точностью до малых высшего порядка можно считать плоским. Построим теперь в каждой точке площадки ΔS векторы $\vec{u}\,d\tau$ (где $\Delta\tau$ — некая малая величина, которую для краткости назовем «относительным параметром смещения»). Ясно, что геометрическое место концов векторов $\vec{u}\cdot\Delta\tau$ образует новое сечение $\Delta S'$ векторной трубки. Площадка $\Delta S'$ не только смещена относительно ΔS, но и отличается от нее как по форме, так и по ориентации в пространстве. Эти изменения характеризуются тензором-производной $\frac{d\vec{u}}{d\vec{r}}$, причем его симметричная часть $\hat{u}_S$ определяет деформацию площадки ΔS, а антисимметричная часть $\operatorname{rot}\vec{u}$ определяет величину ее поворота в пространстве. Угол $\Delta\varphi$ поворота площадки, как нетрудно показать, равен

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\Delta\tau.$$

Это приближенное равенство становится точным в пределе при $\Delta\tau \to 0$:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = 2\frac{d\varphi}{d\tau}. \qquad (34)$$

Понятно, что множитель 2 не имеет принципиального значения, поэтому можно сделать следующий вывод.

Ротор векторной функции характеризует быстроту поворота сечения векторной трубки при перемещении его точек на расстояния, пропорциональные векторам $\vec{u}$.

В том случае, когда векторная функция $\vec{u} \equiv \vec{v}(\vec{r})$ определяет поле скоростей частиц деформируемого тела, остается справедливой формула (31), полученная нами для твердого тела, т. е.

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

Ротор линейной скорости в каждой точке равномерно движущейся сплошной среды равен удвоенному вектору угловой скорости вращения элемента объема, окружающего данную точку.

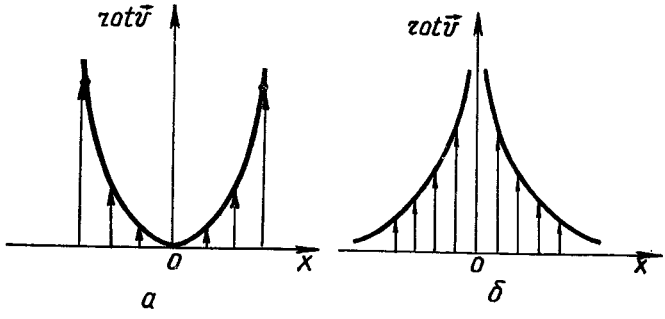

Рис. 21

Точки поля, где $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$, называются **вихрями** потока. Наглядное представление о роторе скорости можно получить с помощью такого примера. Пусть скорости частичек воды на поверхности реки образуют некоторое векторное поле $\vec{v}(x, y)$. Бросим в реку множество небольших полосок фанеры. В тех местах, где полоски плывут поступательно, не вращаясь, $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$. Наоборот, на участках потока, где $\operatorname{rot}\vec{v} \neq 0$, т. е. где существуют вихри, полоски фанеры будут вращаться, и тем быстрее, чем больше по модулю $\operatorname{rot}\vec{v}$.

На рисунке 21, *а* и *б* графически представлены векторные поля $\operatorname{rot}\vec{v}$ плоских течений жидкости, для которых скорости заданы формулами:

а) $\vec{v} = r^2[\vec{\omega}_0, \vec{r}]$, б) $\vec{v} = \frac{1}{r}[\vec{\omega}_0, \vec{r}]$, где $\vec{\omega}_0 = \text{const}$.

§ 8. Оператор Гамильтона

Большинство дифференциальных операций в теории поля упрощается при введении оператора Гамильтона, называемого еще символически вектором «набла» (∇):

$$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad (35)$$

С его помощью основные действия по дифференцированию скалярных и векторных функций сводятся к соответствующему умножению оператора ∇ на эти функции.