



Рис. 21

Точки поля, где $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$, называются вихрями потока. Наглядное представление о роторе скорости можно получить с помощью такого примера. Пусть скорости частицек воды на поверхности реки образуют некоторое векторное поле $\vec{v}(x, y)$. Бросим в реку множество небольших полосок фанеры. В тех местах, где полоски плывут поступательно, не вращаясь, $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$. Наоборот, на участках потока, где $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$, т. е. где существуют вихри, полоски фанеры будут вращаться, и тем быстрее, чем больше по модулю $\operatorname{rot} \vec{v}$.

На рисунке 21, а и б графически представлены векторные поля $\operatorname{rot} \vec{v}$ плоских течений жидкости, для которых скорости заданы формулами:

$$\text{а) } \vec{v} = r^2 [\vec{\omega}_0, \vec{r}], \text{ б) } \vec{v} = \frac{1}{r} [\vec{\omega}_0, \vec{r}], \text{ где } \vec{\omega}_0 = \text{const.}$$

§ 8. Оператор Гамильтона

Большинство дифференциальных операций в теории поля упрощается при введении оператора Гамильтона, называемого еще символически вектором «набла» (∇):

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (35)$$

С его помощью основные действия по дифференцированию скалярных и векторных функций сводятся к соответствующему умножению оператора ∇ на эти функции.

Градиент скалярного поля

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

можно представить как произведение вектора ∇ на скаляр φ :

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi. \quad (36)$$

Дивергенцию векторного поля \vec{a}

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

можно рассматривать как скалярное произведение векторов ∇ на вектор \vec{a} :

$$\text{div } \vec{a} = (\nabla, \vec{a}). \quad (37)$$

Ротор векторного поля \vec{a}

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

совпадает с векторным произведением оператора ∇ на \vec{a} :

$$\text{rot } \vec{a} = [\nabla, \vec{a}]. \quad (38)$$

Наконец, тензорное произведение ∇ на вектор \vec{a} представляет собой транспонированный тензор-производную:

$$\left(\widetilde{\frac{d\vec{a}}{dz}} \right) = \{\nabla, \vec{a}\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial y} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} & \frac{\partial a_y}{\partial z} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Преимущество пользования оператором Гамильтона заключается в том, что, выполняя различные другие дифференциальные действия над скалярными и векторными функциями, можно рассматривать ∇ формально как обычный вектор и применять к нему правила векторной алгебры. Нужно только учитывать, что ∇ есть дифференциальный оператор, обладающий свойствами производной. Отсюда вытекает ряд следствий.

1. Так как оператор ∇ является линейным, то результат его применения к сумме двух функций равен сумме произведений оператора ∇ на каждое слагаемое:

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi, \text{ или } \operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi,$$

$$(\nabla, \vec{a} + \vec{b}) = (\nabla, \vec{a}) + (\nabla, \vec{b}), \text{ или } \operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b},$$

$$[\nabla, \vec{a} + \vec{b}] = [\nabla, \vec{a}] + [\nabla, \vec{b}], \text{ или } \operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b}.$$

2. Поскольку ∇ —дифференциальный оператор, то в тех случаях, когда функции φ или \vec{a} являются постоянными, $\nabla\varphi = 0$, $(\nabla, \vec{a}) = 0$, $[\nabla, \vec{a}] = 0$.

3. Результат действия дифференциального оператора ∇ на произведение двух скалярных функций или на произведение скалярной и векторной функций равен сумме произведений каждого множителя на результат применения оператора ко второму сомножителю:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \psi \cdot \nabla\varphi + \varphi \cdot \nabla\psi, \text{ или } \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi, \\ (\nabla, \varphi\vec{a}) &= (\vec{a}, \nabla\varphi) + \varphi(\nabla, \vec{a}), \text{ или } \operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = (\vec{a}, \operatorname{grad}\varphi) + \\ &\quad + \varphi \operatorname{div}\vec{a}, \quad (40) \\ [\nabla, \varphi\vec{a}] &= \varphi[\nabla, \vec{a}] + [\nabla\varphi, \vec{a}], \text{ или } \operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \\ &= \varphi \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}]. \end{aligned}$$

С помощью оператора Гамильтона легко вычисляются различные вторые производные скалярных и векторных функций.

Скалярное поле $\varphi(\vec{r})$ имеет одну производную—вектор $\operatorname{grad}\varphi$. Векторное же поле $\vec{a}(\vec{r})$ характеризуется двумя первыми производными: скалярной $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторной $\operatorname{rot}\vec{a}$. Следовательно, в математической теории поля встречаются три первые производные: $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$. Легко видеть, что скалярное поле $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторные поля $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{rot}\vec{a}$ характеризуются пятью вторыми производными: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$. Определим каждую из этих вторых производных с помощью оператора ∇ .

1. Величину $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ мы получаем в результате двухкратного скалярного применения оператора ∇ :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = (\nabla, \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

По правилам возведения в квадрат вектора получаем для ∇^2 :

$$\nabla^2 = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор ∇^2 широко применяется в математической физике и называется оператором Лапласа или лапласианом. Он обозначается греческой буквой Δ (дельта).

Итак,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi. \quad (41)$$

2. Для получения величины $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$ необходимо применить оператор ∇ сначала скалярно, и затем векторно:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = [\nabla, \nabla \varphi].$$

Вынося скалярный множитель φ за скобки и учитывая, что векторное произведение двух одинаковых векторов всегда равно нулю, получим:

$$[\nabla, \nabla] \varphi = 0.$$

Следовательно, имеет место тождественное равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (42)$$

означающее, что потенциальное поле не имеет вихрей.

3. Величина $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$ представляет собой смешанное произведение трех сомножителей:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]).$$

Производя циклическую перестановку, получаем:

$$(\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{a}) = 0.$$

Итак, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}$ всегда равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0. \quad (43)$$

Физический смысл этого тождества заключается в том, что вихревое поле не имеет источников (векторные линии не имеют ни начала ни конца, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность).

4. Вторая производная $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$ может быть представлена как двойное векторное произведение:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]].$$

По правилам векторного умножения

$$[\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a}.$$

Значит,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}. \quad (44)$$

5. Из предыдущей формулы получаем выражение для второй производной $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}$:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} + \Delta \vec{a}. \quad (45)$$

§ 9. Формулы Грина

В качестве приложений полученных в предыдущем параграфе результатов выведем часто применяемые в математической физике так называемые *формулы Грина*.

Для любого векторного поля согласно теореме Гаусса—Остроградского имеет место равенство:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV = \iint_S a_n ds. \quad (28)$$

Положим теперь, что

$$\vec{a}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) \cdot \vec{b}(\vec{r}), \quad (46)$$

где φ и \vec{b} — некоторые скалярная и векторная функции координат.

Согласно соотношению (40)

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{b}) = (\vec{b}, \operatorname{grad} \varphi) + \varphi \operatorname{div} \vec{b}.$$

Сделаем еще предположение, что векторное поле $\vec{b}(\vec{r})$ потенциально, т. е. что

$$\vec{b}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \psi(\vec{r}). \quad (46')$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi) + \varphi \cdot \Delta \psi. \quad (47)$$

Поскольку согласно (46) и (46') $\vec{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$, то

$$a_n = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (48)$$