По правилам векторного умножения

$$[\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a}.$$

Значит,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}. \tag{44}$$

5. Из предыдущей формулы получаем выражение для второй производной $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} + \Delta\vec{a}. \tag{45}$$

§ 9. Формулы Грина

В качестве приложений полученных в предыдущем параграфе результатов выведем часто применяемые в математической физике так называемые *формулы Грина*.

Для любого векторного поля согласно теореме Гаусса—Остроградского имеет место равенство:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV = \oiint\limits_S a_n\, ds. \tag{28}$$

Положим теперь, что

$$\vec{a}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})\cdot\vec{b}(\vec{r}), \tag{46}$$

где φ и $\vec{b}$ — некоторые скалярная и векторная функции координат.

Согласно соотношению (40)

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{b}) = (\vec{b}, \operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\vec{b}.$$

Сделаем еще предположение, что векторное поле $\vec{b}(\vec{r})$ потенциально, т. е. что

$$\vec{b}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\psi(\vec{r}). \tag{46'}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi) = (\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) + \varphi\cdot\Delta\psi. \tag{47}$$

Поскольку согласно (46) и (46′) $\vec{a} = \varphi\operatorname{grad}\psi$, то

$$a_n = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}. \tag{48}$$

Следовательно, равенство Остроградского—Гаусса принимает вид:

$$\iiint\limits_V (\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\cdot\Delta\psi)\,dv=\oiint\limits_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS. \qquad (49)$$

Это первая формула Грина.

Применяя равенство (47) к векторной функции $\vec{a}=\psi\cdot\operatorname{grad}\varphi$, получаем:

$$\iiint\limits_V (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\cdot\nabla\varphi)\,dv=\iint\limits_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \qquad (50)$$

Вычитая последнее из (49), приходим ко второй формуле Грина:

$$\iiint\limits_V (\varphi\cdot\Delta\psi-\psi\cdot\Delta\varphi)\,dV=\oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS. \qquad (51)$$

§ 10. Классификация векторных полей

Как мы знаем, любое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ аналитически характеризуется двумя «производными»: скалярной $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторной $\operatorname{rot}\vec{a}$. Простейшими классами векторных полей являются такие, у которых в каждой точке одна из производных равна нулю.

1. Поле называется *безвихревым*, если

$$\operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0. \qquad (52)$$

Несложно убедиться, что безвихревое поле является полем потенциальным, т. е. при выполнении условия (52) всегда можно подобрать такое скалярное поле $\varphi(\vec{r})$, для которого наше векторное поле является полем градиента этого скалярного поля:

$$\vec{a}=\operatorname{grad}\varphi. \qquad (52)$$

Основное свойство потенциального поля состоит в равенстве нулю циркуляции вектора по произвольной замкнутой кривой:

$$\Gamma=\oint\limits_L a_l\,dl=0. \qquad (52')$$

Необходимость этого условия очевидна. Действительно,