Следовательно, равенство Остроградского—Гаусса принимает вид:

$$\iiint\limits_V (\nabla\varphi\cdot\nabla\psi+\varphi\cdot\Delta\psi)\,dv=\oiint\limits_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS. \qquad (49)$$

Это первая формула Грина.

Применяя равенство (47) к векторной функции $\vec{a}=\psi\cdot\operatorname{grad}\varphi$, получаем:

$$\iiint\limits_V (\nabla\psi\cdot\nabla\varphi+\psi\cdot\nabla\varphi)\,dv=\iint\limits_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \qquad (50)$$

Вычитая последнее из (49), приходим ко второй формуле Грина:

$$\iiint\limits_V (\varphi\cdot\Delta\psi-\psi\cdot\Delta\varphi)\,dV=\oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS. \qquad (51)$$

§ 10. Классификация векторных полей

Как мы знаем, любое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ аналитически характеризуется двумя «производными»: скалярной $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторной $\operatorname{rot}\vec{a}$. Простейшими классами векторных полей являются такие, у которых в каждой точке одна из производных равна нулю.

1. Поле называется *безвихревым*, если

$$\operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0. \qquad (52)$$

Несложно убедиться, что безвихревое поле является полем потенциальным, т. е. при выполнении условия (52) всегда можно подобрать такое скалярное поле $\varphi(\vec{r})$, для которого наше векторное поле является полем градиента этого скалярного поля:

$$\vec{a}=\operatorname{grad}\varphi. \qquad (52)$$

Основное свойство потенциального поля состоит в равенстве нулю циркуляции вектора по произвольной замкнутой кривой:

$$\Gamma=\oint\limits_L a_l\,dl=0. \qquad (52')$$

Необходимость этого условия очевидна. Действительно,

в потенциальном поле $a_l = \frac{\partial \varphi}{\partial l}$, поэтому

$$\oint_L a_l \, dl = \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial l} \, dl = \oint_L d\varphi = 0.$$

Нетрудно доказать и достаточность этого условия.

Из основного свойства следует, что в потенциальных полях криволинейный интеграл от вектора $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ от точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до точки $N(x_2, y_2, z_2)$ зависит не от вида кривой интегрирования, а только от значения потенциала φ в начальной и конечной точках:

$$\int_M^N a_l \, dl = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial l} \, dl = \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1).$$

Примером потенциального векторного поля является поле консервативных сил (гравитационное поле, электростатическое поле и т. п.), в котором работа этих сил при перемещении частиц из одной точки в другую $A = \int_1^2 F \, \vec{dl}$ не зависит от выбора траектории.

Характерным для потенциальных полей является наличие эквипотенциальных поверхностей, между которыми векторы поля направлены в сторону возрастания потенциала.

Итак, всякое потенциальное поле бесциркуляционно. С другой стороны, по теореме Стокса

$$\oint_L a_l \, dl = \iint_S \operatorname{rot}_n \vec{a} \cdot dS.$$

Поэтому тождественное обращение в нуль циркуляции вектора приводит к выполнению условия безвихревости $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$.

Следовательно, условия потенциальности ($\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$), безвихревости ($\operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$) и бесциркуляционности $\left(\int_L a_l \, dl \equiv 0\right)$ векторного поля полностью эквивалентны.

Возможность представления векторной функции в виде градиента скалярной функции имеет большое значение в математической физике, ибо изучение векторного поля $\vec{a}(\vec{r})$ в этом случае сводится к исследованию намного

более простого скалярного поля $\varphi(\vec{r})$. При этом скалярная функция $\varphi(\vec{r})$ называется скалярным *потенциалом* данного *векторного поля* $\vec{a}(\vec{r})$.

2. Векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого

$$\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0, \tag{54}$$

является полем без источников и называется *соленоидальным* или *трубчатым*.

Согласно формуле (43) дивергенция от ротора произвольного вектора всегда равна нулю:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} \equiv 0. \tag{43}$$

Сопоставляя (43) и (54), мы можем векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ представить как ротор некоторого другого векторного поля $\vec{b}(\vec{r})$:

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}. \tag{55}$$

Иными словами, соленоидальное поле является вихревым.

Основным свойством соленоидального поля $\vec{a}(\vec{r})$ является равенство нулю потока вектора $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность в пространстве поля:

$$\oiint_S a_n\, dS \equiv 0. \tag{56}$$

Это непосредственно следует из формулы Гаусса—Остроградского (28). В частности, если в качестве S выбрать поверхность некоторой части векторной трубки, то мы придем к установленному еще в § 6 выводу о постоянстве в вихревом поле *напряжения* вдоль векторной трубки. (Напряжением I векторной трубки в данном сечении S называют поток вектора $\vec{a}$ через это сечение: $I = \iint_S a_n dS$.)

Из основного свойства соленоидальных полей вытекает, что векторные линии у них не имеют ни начала, ни конца, они либо замкнуты, либо уходят в бесконечность.

3. Поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого и $\operatorname{div}\vec{a} \equiv 0$, и $\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0$ не имеют ни источников, ни вихрей. Такое поле одновре-

менно и потенциально и соленоидально (вихревое и безвихревое).

Рассмотрим, какими свойствами обладает такое векторное поле. Поскольку $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, то $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде градиента скалярного поля:

$$\vec{a}=\operatorname{grad}\varphi.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то, взяв дивергенцию от предыдущего равенства, получим, что потенциал φ должен удовлетворять условию

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=0,$$

или

$$\Delta\varphi=0. \tag{57}$$

Итак, векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого обе производные тождественно равны нулю ($\operatorname{div}\vec{a}\equiv 0$, $\operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0$), всегда можно представить в виде градиента скалярной функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

4. Важность изучения потенциальных и вихревых полей становится особенно ясной, если принять во внимание теорему Гельмгольца.

Всякое однозначное, непрерывное и гладкое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде суммы потенциального и вихревого полей:

$$\vec{a}(\vec{r})=\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})+\operatorname{rot}\vec{b}(\vec{r}). \tag{58}$$

При этом векторный потенциал $\vec{b}$ всегда можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div}\vec{b}=0$. А поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b}\equiv 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\equiv\Delta\varphi$, то источники исходного поля $\operatorname{div}\vec{a}$ выражаются через лапласиан $\Delta\varphi$ и не зависят от $\vec{b}$.

§ 11. Физические векторные и тензорные поля в четырехмерном пространстве-времени

В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры четырехмерных векторных и тензорных величин, встречающихся в физике.