менно и потенциально и соленоидально (вихревое и безвихревое).

Рассмотрим, какими свойствами обладает такое векторное поле. Поскольку $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, то $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде градиента скалярного поля:

$$\vec{a}=\operatorname{grad}\varphi.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то, взяв дивергенцию от предыдущего равенства, получим, что потенциал φ должен удовлетворять условию

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=0,$$

или

$$\Delta\varphi=0. \tag{57}$$

Итак, векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$, у которого обе производные тождественно равны нулю ($\operatorname{div}\vec{a}\equiv 0$, $\operatorname{rot}\vec{a}\equiv 0$), всегда можно представить в виде градиента скалярной функции φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

4. Важность изучения потенциальных и вихревых полей становится особенно ясной, если принять во внимание теорему Гельмгольца.

Всякое однозначное, непрерывное и гладкое векторное поле $\vec{a}(\vec{r})$ можно представить в виде суммы потенциального и вихревого полей:

$$\vec{a}(\vec{r})=\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})+\operatorname{rot}\vec{b}(\vec{r}). \tag{58}$$

При этом векторный потенциал $\vec{b}$ всегда можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div}\vec{b}=0$. А поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b}\equiv 0$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\equiv\Delta\varphi$, то источники исходного поля $\operatorname{div}\vec{a}$ выражаются через лапласиан $\Delta\varphi$ и не зависят от $\vec{b}$.

§ 11. Физические векторные и тензорные поля в четырехмерном пространстве-времени

В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры четырехмерных векторных и тензорных величин, встречающихся в физике.

Математический аппарат теории относительности пользуется своеобразным пространством четырех измерений, где три измерения x_1, x_2, x_3 берутся по обычным осям координат X, Y, Z (пространственные оси), а четвертым измерением x_4 служит мнимая координата ict (где $i=\sqrt{-1}$, c — скорость света, t — время). Такое пространство называют *псевдоевклидовым* (см. ч. III); оно обладает некоторыми своеобразными свойствами, на которые мы укажем ниже.

Каждая точка характеризуется четырьмя координатами, из которых три — x_1, x_2, x_3 являются действительными числами, а четвертая x_4 — мнимая. Прямолинейный отрезок, соединяющий две точки $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ и $N(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$, представляет собой четырехмерный вектор $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$, компоненты которого $a_k=x''_k-x'_k$ (где $k=1, 2, 3, 4$). Согласно формуле (3) квадрат длины четырехмерного вектора

$$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$$

в отличие от евклидова пространства может из-за мнимости a_4 быть не только положительной, но и отрицательной величиной, а также равняться нулю.

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов в псевдоевклидовом пространстве определяется по аналогии с обычным скалярным произведением (в трехмерном пространстве) так:

$$(\vec{a}, \vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4.$$

При этом, как легко убедиться, стоящая справа сумма произведений компонентов является инвариантом, не меняющимся при повороте четырехмерной системы координат.

Однако в отличие от обычного пространства величина $(\vec{a}, \vec{b})$ может быть не только положительной, но и отрицательной, а также равняться нулю. В последнем случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют взаимно перпендикулярными.

Два четырехмерных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно перемножить тензорно, в результате чего получается четырех-

мерная диада

$$\hat{D}=\{\vec{a},\vec{b}\}=\begin{Vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{Vmatrix}.$$

Однако векторное произведение четырехмерных векторов существенно отличается от векторного произведения в трехмерном пространстве. Дело в том, что векторное произведение двух векторов любой размерности, по-существу, является антисимметричным тензором, равным удвоенной антисимметричной части диады. В случае трехмерного пространства этот тензор

$$\hat{D}_A=\begin{Vmatrix} 0 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 \\ a_2b_1-a_1b_2 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 & a_3b_2-a_2b_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

имеет три существенно различные компоненты и ему можно сопоставить трехмерный вектор

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В случае же четырехмерного пространства антисимметричная часть диады содержит 6 компонентов типа $D_{ik}=$ $=a_ib_k-a_kb_i$, в то время как вектор в четырехмерном пространстве имеет только 4 компонента. Следовательно, антисимметричному тензору $\hat{D}_A$ никакой вектор сопоставить нельзя. Мы приходим к выводу, что роль векторного произведения двух четырехмерных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ играет антисимметричный четырехмерный тензор

$$\hat{D}_A=\begin{Vmatrix} 0 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ a_2b_1-a_1b_2 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 & a_3b_2-a_2b_3 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \\ a_4b_1-a_1b_4 & a_4b_2-a_2b_4 & a_4b_3-a_3b_4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко понять, что из шести его компонентов три являются действительными, а остальные три (содержащие индекс «4») — мнимыми. Подобным же образом обобщаются на случай четырехмерного пространства остальные операции векторной и тензорной алгебры.

Рассмотрим подробнее четырехмерные дифференциальные операции векторного анализа.

Проще всего эти операции обобщаются с помощью четырехмерного векторного оператора набла:

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \vec{i}_4 \frac{\partial}{\partial x_4}. \tag{59}$$

Градиентом скалярной функции в четырехмерном пространстве называется четырехмерный вектор:

$$\operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla \varphi = \sum_{k=1}^{4} \vec{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \tag{60}$$

Четырехмерной дивергенцией векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$ назовем инвариантную величину:

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv (\nabla, \vec{a}) = \sum_{k}^{4} \frac{\partial a_k}{\partial x_k}. \tag{61}$$

В частности, если вектор $\vec{a}$ является четырехмерным градиентом скалярной функции φ, то, подставляя (60) в (61), получаем:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{k}^{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}. \tag{62}$$

Эту величину обозначают символом $\Box\varphi$ (где $\Box$ — *четырехмерный лапласиан*, или *даламбериан*). С помощью оператора ∇ легко получается выражение и для дифференциальной операции, называемой *четырехмерным ротором*:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 2 \{\nabla \cdot \vec{a}\}_A =$$

$$= 2 \begin{Vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right) \\ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_2}\right) \\ \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) & 0 & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_4} - \frac{\partial a_4}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_4}\right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_4}\right) & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_4}\right) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Величина $\operatorname{rot} \vec{a}$ представляет собой удвоенную антисимметричную часть тензорного произведения векторов ∇ и $\vec{a}$ (диады).

Наконец, производная четырехмерной векторной функции $\vec{a}$ по радиус-вектору $\vec{r}$ представляет собой тензор:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{r}} = \widetilde{\{\nabla \cdot \vec{a}\}} = \left\| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right\|. \tag{64}$$

После такого краткого ознакомления с четырехмерным пространством-временем приведем несколько примеров конкретных физических векторных и тензорных полей.

1. С точки зрения теории относительности электрическое и магнитное поля являются различными аспектами *единого электромагнитного поля*. Последнее можно характеризовать четырехмерным вектором $\vec{\Phi}$, называемым *электромагнитным потенциалом*, компонентами которого являются величина $i\varphi$ (где φ — скалярный электрический потенциал, а $i = \sqrt{-1}$) и проекции A_x, A_y, A_z на координатные оси векторного магнитного потенциала $\vec{A}$.

Потенциал электромагнитного поля образует в четырехмерном *пространстве-времени* векторное поле:

$$\vec{\Phi}(\vec{r}) = \vec{\Phi}(A_x, A_y, A_z, i\varphi).$$

2. Как известно из теории электричества, потенциалы φ и $\vec{A}$ являются косвенными характеристиками электрического и магнитного полей. Непосредственно эти поля определяются векторами напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В четырехмерном пространстве напряженность электромагнитного поля представляет собой антисимметричный тензор:

$$\hat{F} = \begin{Vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{Vmatrix}, \tag{65}$$

действительные компоненты которого характеризуют магнитное поле $\vec{H}$, а мнимые — электрическое поле $\vec{E}$. Между напряженностью $\hat{F}$ и потенциалом Φ электромагнитного поля существует простая четырехмерная дифференциальная связь

$$\hat{F} = \operatorname{rot} \vec{\Phi},$$

являющаяся обобщением известного из электродинамики соотношения $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Таким образом, математически электромагнитное поле в четырехмерном пространстве-времени образует тензорное поле $\hat{F}(\vec{r})$.

3. В классической механике количество движения материи может быть охарактеризовано двумя различными величинами — вектором импульса $\vec{P}$ (с компонентами mv_x, mv_y, mv_z) или скаляром $E = \frac{mv^2}{2}$, выражающим собой кинетическую энергию тела.

Согласно теории относительности обе эти величины объединяются в единый четырехмерный вектор импульса $\vec{G}$ с компонентами $\left(mv_x, mv_y, mv_z, \frac{i}{c} E\right)$. Точно так же четырехмерным вектором является в механике теории относительности сила $\vec{K}$.

Поэтому и основной закон динамики — второй закон Ньютона — записывается в четырехмерной форме так:

$$\frac{d\vec{G}}{d\tau} = \vec{K},$$

где τ — так называемое *собственное время*, измеряемое по часам движущегося тела.

Глава III

ТЕОРИЯ ПОЛЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

В предыдущих главах мы пользовались только прямоугольными декартовыми координатами. Однако при решении многих задач математической физики удобно применять криволинейные координаты.

§ 1. Криволинейные координаты

Если декартовы координаты x, y, z являются взаимно однозначными функциями других трех переменных q_1, q_2, q_3

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3), \qquad (1)$$