Часть вторая

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Глава I.

ВЫВОД ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Поперечные колебания струны. Волновое уравнение

Струна — это тонкая, гибкая натянутая нить, закрепленная в двух точках. Если струну отклонить от положения равновесия (которое на рисунке 30, *а* совпадает с осью X), то она будет совершать поперечные колебания. Будем обозначать смещение точек струны через u. Ясно, что u является функцией координаты x и времени t:

$$u = u(x, t). \tag{1}$$

Задача состоит в том, чтобы найти положение струны в любой момент времени, т. е. найти явный вид функции (1). Мы сейчас покажем, что при малых отклонениях функция $u(x, t)$ удовлетворяет определенному линейному дифференциальному уравнению в частных производных. Выделим элемент струны ds, который в начальный момент имел длину dx (рис. 30, *б*). По формуле квадрата длины элемента дуги имеем:

$$ds^2 = dx^2 + du^2$$

или

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, для которых $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, то под корнем можно пренебречь квадратом про-

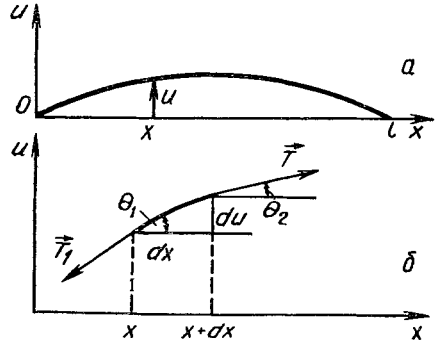

Рис. 30

изводной и в первом приближении считать, что $ds \approx dx$. Поскольку в этом приближении струна не является растяжимой, мы вправе считать натяжение струны T неизменным по величине.

Применим теперь к рассматриваемому элементу струны второй закон Ньютона: произведение массы $dm = \rho \cdot dx$ (ρ — линейная плотность) на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ равно сумме сил, приложенных к элементу. Полагая струну очень тонкой, можно пренебречь весом любого ее элемента и учитывать только силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, действующие с обеих сторон. При этом нужно иметь в виду, что хотя натяжение вдоль струны по модулю постоянно, оно в отклоненной струне меняется по направлению от точки к точке.

Далее, так как колебания являются поперечными (вдоль оси U), то нас интересует только сумма вертикальных проекций сил (сумма горизонтальных составляющих, очевидно, равна нулю):

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_{2u} + T_{1u}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что

$$T_{1u} = -T \sin\theta_1 \text{ и } T_{2u} = T \sin\theta_2.$$

Для малых колебаний углы θ_1 и θ_2 малы и можно приближенно (с точностью до малых второго порядка) принять

$$\sin\theta_1 \approx \operatorname{tg}\theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \text{ и } \sin\theta_2 \approx \operatorname{tg}\theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}.$$

Следовательно, правая часть уравнения (2) сводится к выражению

$$T_{2u} + T_{1u} = T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right].$$

Разложим теперь в ряд Тейлора $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx}$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x \cdot dx + \ldots.$$

Тогда с точностью до малых второго порядка

$$T_{2u} + T_{1u} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), приходим к равенству

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Введя обозначение

$$\frac{T}{\rho} = v^2, \qquad (5)$$

получаем *уравнение свободных колебаний струны*:

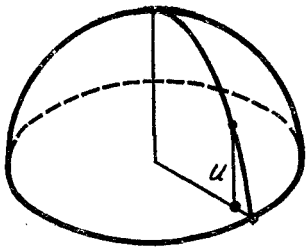

Рис. 31

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (I)$$

Как всегда в механике, одного лишь уравнения движения (I) для определения формы струны в любой момент времени недостаточно. Необходимо еще задать *начальные условия*, т. е. положение ее точек и их скорости в момент $t = 0$:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \qquad (6)$$

Кроме того, нужно еще указать, что происходит на концах струны, т. е. задать *граничные условия*. Для струны, закрепленной с обоих концов, граничные условия имеют вид:

$$u|_{x=0} = 0. \quad u|_{x=l} = 0. \qquad (7)$$

Таким образом, колебания струны описываются *одномерным волновым уравнением* (I). Если поперечные колебания совершает натянутая упругая пленка (мембрана) (рис. 31), то соответствующее волновое уравнение является *двумерным*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (I')$$

При этом начальные условия, определяющие положения и скорости точек мембраны, имеют вид:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Что касается граничного условия, то, поскольку мембрана вдоль контура L обычно закреплена, оно принимает форму:

$$u|_L = 0.$$

Еще более общий случай мы получаем, когда колебания (продольные) совершают частицы сплошной среды.

Это—случай акустических колебаний. Дифференциальное уравнение для таких колебаний становится *трехмерным* волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \qquad (\mathrm{I}'')$$

или (в сокращенной записи):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u.$$

Здесь $u(x, y, z, t)$—потенциал скоростей движения точек среды, v—скорость звука в данной среде.

Начальные условия записывают в такой форме:

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Граничное же условие обычно выражает тот факт, что на границе с твердой непроницаемой поверхностью S сосуда, в котором находится упругая среда, нормальная составляющая скорости частиц равна нулю:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Следует отметить, что трехмерным волновым уравнением описываются не только акустические, но и электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме. А именно, для напряженностей электрического и магнитного полей имеют место уравнения:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где c—скорость света в вакууме.

§ 2. Уравнение теплопроводности

Если температура в различных точках тела неодинакова, то в нем происходит перераспределение тепла в соответствии с эмпирическим законом Фурье, согласно которому количество тепла dQ, протекающее через малую площадку с площадью dS за короткий промежуток времени, прямо пропорционально площади dS, длительности