Это—случай акустических колебаний. Дифференциальное уравнение для таких колебаний становится *трехмерным* волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \qquad (\mathrm{I}'')$$

или (в сокращенной записи):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u.$$

Здесь $u(x, y, z, t)$—потенциал скоростей движения точек среды, $v$—скорость звука в данной среде.

Начальные условия записывают в такой форме:

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Граничное же условие обычно выражает тот факт, что на границе с твердой непроницаемой поверхностью $S$ сосуда, в котором находится упругая среда, нормальная составляющая скорости частиц равна нулю:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Следует отметить, что трехмерным волновым уравнением описываются не только акустические, но и электромагнитные волны, распространяющиеся в вакууме. А именно, для напряженностей электрического и магнитного полей имеют место уравнения:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0,$$

где $c$—скорость света в вакууме.

## § 2. Уравнение теплопроводности

Если температура в различных точках тела неодинакова, то в нем происходит перераспределение тепла в соответствии с эмпирическим законом Фурье, согласно которому количество тепла $dQ$, протекающее через малую площадку с площадью $dS$ за короткий промежуток времени, прямо пропорционально площади $dS$, длительности

промежутка $dt$ и производной от температуры по нормали к площадке:

$$dQ = -k\frac{\partial T}{\partial n}\,dSdt, \tag{8}$$

где $k$ — коэффициент (внутренней) теплопроводности вещества.

Введем понятие вектора плотности теплового потока $\vec{q}$, совпадающего по направлению с градиентом температуры, а по модулю равный количеству тепла, протекающего за одну секунду через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к градиенту температуры. Тогда закон теплопроводности принимает векторную форму:

$$\vec{q} = -k\,\mathrm{grad}\,T. \tag{9}$$

Происхождение знака минус в (8) и (9) понятно: градиент направлен в сторону возрастания температуры, а тепло течет к более холодным точкам тела.

Перейдем теперь к выводу дифференциального уравнения распространения тепла. Пусть имеется однородное тело, температура внутри которого является функцией координат $x$, $y$, $z$ и времени $t$:

$$T = T(x,\ y,\ z,\ t).$$

Для общности предположим, что внутри тела существуют источники тепла, мощность которых равна $Q(x, y, z, t)$. Выделим в теле некоторый малый объем $\Delta V$ и составим его тепловой баланс. За время $dt$ в нем выделится количество теплоты:

$$\Delta Q = dt\int\limits_{\Delta V} Q(x,\ y,\ z,\ t)\,dV. \tag{10}$$

Часть этого тепла $\Delta Q'$ идет на повышение температуры элемента $\Delta V$, а остальная доля $\Delta Q''$ из-за теплопроводности уйдет в окружающие слои тела.

Сначала определим $\Delta Q'$. Количество тепла, необходимое для повышения температуры бесконечно малого элемента $dV$ от $T(t)$ до $T(t+dt)$, равно:

$$dQ' = c\rho dV\,[T(t+dt) - T(t)] = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}\,dt\,dV,$$

где $c$ — удельная теплоемкость тела, $\rho$ — его плотность.

Интегрируя это равенство по объему $\Delta V$, получим:

$$\Delta Q' = dt \int\limits_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \tag{11}$$

Чтобы определить $\Delta Q''$, учтем, что за одну секунду через поверхность $\Delta S$, ограничивающую объем $\Delta V$, протекает количество теплоты

$$\oint\limits_{\Delta S} q_n dS.$$

Поэтому

$$\Delta Q'' = dt \oint\limits_{\Delta S} q_n dS. \tag{12}$$

Приравнивая $\Delta Q$ сумме $\Delta Q'$ и $\Delta Q''$, получаем:

$$\int\limits_{\Delta V} Q\, dV = \int\limits_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint\limits_{\Delta S} q_n dS. \tag{13}$$

В этом равенстве стоят интегралы по разным переменным. Поэтому применим к последнему из них теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint\limits_{\Delta S} q_n dS = \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q}\, dV.$$

Тогда равенство (13) примет вид:

$$\int\limits_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q}\, dV = \int\limits_{\Delta V} Q\, dV,$$

или

$$\int\limits_{\Delta V} \left[ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right] dV = 0.$$

Поскольку это соотношение справедливо для произвольного объема $\Delta V$, то должно быть равным нулю само подынтегральное выражение:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q = 0.$$

Подставляя сюда значение $q$ из (9), получаем:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) = Q. \tag{14}$$

Так как по предположению тело однородно, то коэффициент теплопроводности $k$ является величиной постоян-

ной. Поэтому

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T.$$

В ч.I было показано, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \Delta T$. Учитывая это, приходим к следующему дифференциальному уравнению распространения тепла:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T + Q(x, y, z, t). \qquad (14')$$

Рассмотрим частные случаи этого уравнения.

**1. Распространение тепла без тепловыделения.** Если внутри рассматриваемой области нет источников тепла, т. е. $Q = 0$, то уравнение (14′) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T, \qquad (11)$$

где $a = \frac{k}{c\rho}$ — так называемый *коэффициент температуропроводности.*

**2. Установившийся поток тепла.** Для стационарного процесса теплообмена, т. е. когда температура в каждой точке тела не меняется со временем $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, уравнение теплопроводности приобретает форму так называемого уравнения Пуассона:

$$\Delta T = -\rho, \qquad (11')$$

где $\rho = \frac{Q}{k}$.

**3. Установившийся поток тепла без тепловыделения.** В этом случае и $Q = 0$, и $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, поэтому распределение температуры в теле подчиняется уравнению Лапласа:

$$\Delta T = 0. \qquad (11'')$$

Уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

содержит производные второго порядка по координатам $x$, $y$, $z$ и производную первого порядка по времени $t$. Поэтому для однозначности его решения должны быть заданы одно начальное условие и два граничных условия для каждой координаты.

Стационарные уравнения Пуассона и Лапласа не содержат переменной $t$, так что в этом случае необходимы только граничные условия.

Начальное условие обычно состоит в том, что температура всех точек тела в момент $t=0$ является определенной функцией координат:

$$T|_{t=0}=f(x,\ y,\ z). \tag{15}$$

Что касается граничных, или краевых, условий, то при решении физических задач они бывают трех видов.

В случае краевых условий первого рода задается температура на поверхности $S$ тела в любой момент времени:

$$T|_S=\varphi(x,\ y,\ z). \tag{16}$$

(В общем случае функция $\varphi$ может зависеть и от $t$, но обычно температура на поверхности постоянна.)

При краевых условиях второго рода температура на поверхности неизвестна, но указывается тепловой поток $q$, вытекающий или втекающий через поверхность, как функция координат точек поверхности:

$$q_n=\psi(x,\ y,\ z),$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности.

Так как согласно (9) $q_n=-k\frac{dT}{dn}$, то граничные условия имеют дифференциальный характер:

$$\frac{dT}{dn}=\psi(x,\ y,\ z). \tag{16'}$$

Наконец, краевые условия третьего рода являются обобщением условий первого и второго рода:

$$\frac{dT}{dn}-hT|_S=F(x,\ y,\ z). \tag{16''}$$

Постоянная $h$ называется *коэффициентом внешней теплопроводности*. Равенство (16″) применяется в случае процесса теплоотдачи (охлаждения), т. е. переноса тепла от тела к окружающей среде. Согласно эмпирическому закону Ньютона количество тепла, отдаваемого элементом поверхности $dS$ с температурой $T_1$ за время $dt$ в окружающую среду с температурой $T_0$, прямо пропорционально разности $T_1-T_0$ и величинам $dS$ и $dt$:

$$dQ=\alpha(T_1-T_0)\,dS\,dt.$$

Множитель пропорциональности $\alpha$ называется *коэффициентом теплоотдачи*.

Таким образом, тепловой поток $q$, вытекающий из тела наружу, равен:

$$q = \alpha (T_1 - T_0). \tag{17}$$

С другой стороны, такой же тепловой поток должен подводиться изнутри путем теплопроводности. Поэтому согласно (9)

$$q = -k \frac{dT}{dn}. \tag{17'}$$

Приравнивая правые части (17) и (17′), получаем:

$$\frac{dT}{dn} = -\frac{\alpha}{k} \left( T_1 - T_0 \right).$$

Обозначив отношение $\alpha/k$ через $h$ и учитывая, что $T_1 = T|_S$, приведем последнее равенство к виду:

$$\frac{dT}{dn} - hT|_S = hT_0.$$

Температура среды $T_0$ и коэффициент $h$ в разных точках поверхности раздела сред, вообще говоря, различны. Если известна их зависимость от координат, то произведение $hT_0$ представляет собой определенную функцию координат $F(x, y, z)$, и мы приходим к граничным условиям третьего рода (16″).

## § 3. Основное уравнение электростатики

Основным физическим законом электростатического поля является теорема Гаусса.

**Поток напряженности $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен (в абсолютной системе единиц) умноженной на $4\pi$ алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности:**

$$\oint_S E_n \, ds = 4\pi \sum_i e_i. \tag{18}$$

В общем случае электрические заряды распределены по объему с некоторой плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$. Поэтому вместо суммы в правой части (18) появляется интеграл:

$$\oint_S E_n \, dS = 4\pi \int_V \rho \, dV. \tag{19}$$

В обеих частях этого равенства интегрирование производится по разным переменным. Поэтому, применив к (19)