теорему Остроградского — Гаусса:

$$\oint_S E_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV,$$

получаем:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho)\, dV. \qquad (20)$$

Так как объем V в (20) является произвольным, то равно нулю само подынтегральное выражение и мы переходим к дифференциальной форме теоремы Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad (21)$$

представляющей собой в теории электричества третье уравнение Максвелла. Из электродинамики известно, что электростатическое поле потенциально:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \qquad (22)$$

где φ — электрический потенциал. Учитывая это, можно уравнение (22) записать в таком виде:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Это — основное дифференциальное уравнение электростатики — уравнение Пуассона. В системе единиц СИ это уравнение записывается проще:

$$\Delta\varphi = -\rho.$$

С его помощью можно установить вид скалярного поля потенциала φ, если известно распределение зарядов в пространстве $\rho(x, y, z)$.

Если же в некоторой области зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0.$$

§ 4. Уравнение переменного электромагнитного поля в потенциалах

Как известно из теории электричества (электродинамики), заряды и токи создают в пространстве электрическое и магнитное поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, между которыми существует сложная функциональная связь. Важнейшей задачей электродинамики является определение вида этих функций $\vec{E}(x, y, z, t)$ и $\vec{H}(x, y, z, t)$ по заданному распределению неподвижных и движущихся зарядов.

Как впервые показал Максвелл, основные опытные законы, описывающие свойства электромагнитного поля, носят дифференциальный характер, т. е. позволяют непосредственно определить вид только производных от векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Но так как каждое векторное поле имеет две пространственные производные (скалярную—дивергенцию и векторную—ротор), то для полного описания электромагнитного поля должны быть заданы четыре дифференциальных уравнения, которые называют уравнениями Максвелла.

В вакууме они имеют следующий вид (в абсолютной системе единиц):

а) $\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho$, в) $\operatorname{div}\vec{H}=0$,

б) $\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, г) $\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Здесь ρ — плотность зарядов, j — плотность токов, c—скорость света.

Разберем вкратце физический смысл каждого уравнения. Уравнение (а) $\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho$ означает, что источниками электрического поля являются заряды, причем мощность источника равна $4\pi\rho$.

Уравнение (в) $\operatorname{div}\vec{H}=0$ означает, что магнитное поле не имеет источников, т. е. является вихревым векторным полем. Уравнение (б) $\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ представляет собой закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Наконец, уравнение (г) $\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ обобщает закон Био—Савара, отличаясь от него членом $\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, характеризующим так называемый *ток смещения*.

Последние два уравнения показывают, что причинами возникновения и изменения электромагнитного поля являются не только наличие электрических зарядов, но и движение этих зарядов, а также изменение со временем самого поля. Благодаря этому возможно существование магнитного поля, хотя в природе нет магнитных зарядов, а также существование свободного электромагнитного поля в пространстве, лишенном как зарядов, так и токов.

Интегрируя уравнения Максвелла, можно в принципе определить электрическое и магнитное поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Но как это можно сделать практически? Ведь это сложная система взаимосвязанных векторных дифференциальных уравнений в частных производных.

Оказывается, что задача значительно упрощается введением двух вспомогательных величин — скалярного электрического потенциала φ и векторного магнитного потенциала $\vec{A}$, определяемых равенствами:

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \tag{23}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{24}$$

Накладывая еще дополнительное условие Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

и подставляя (23), (24) и (25) в уравнения Максвелла, получаем два аналогичных дифференциальных уравнения для каждого из потенциалов:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{26}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение (26), которое еще можно записать так:

$$\Box\, \varphi = -4\pi\rho, \tag{III}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера. Это уравнение называют *уравнением Даламбера*. Заметим, что в частном случае стационарного (неизменного во времени) поля даламбериан превращается в обычный лапласиан Δ и уравнение Даламбера переходит в известное нам уже уравнение Пуассона: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.

В другом частном случае, когда в переменном электрическом поле отсутствуют заряды ($\rho = 0$), уравнение Даламбера сводится к трехмерному волновому уравнению $\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, описывающему волны, распространяющиеся со скоростью c.

Наконец, если поле со временем не меняется и в нем отсутствуют заряды, уравнение Даламбера вырождается в уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

§ 5. Уравнение Шредингера

Изучение физических свойств молекул, атомов и составляющих их частиц привело в начале XX века исследователей к убеждению, что в микромире существуют свои законы, качественно отличные от законов макромира. Постепенно сущность этих законов была раскрыта и к концу двадцатых годов в атомной физике сложилась стройная логическая система — *квантовая механика*.

Основное утверждение квантовой механики заключается в том, что поведение любой микрочастицы (скажем, электрона) описывается некоторой (вообще говоря, комплексной) функцией координат и времени $\psi(x, y, z, t)$, причем, квадрат модуля этой функции $|\psi|^2$ характеризует *плотность вероятности*, т. е. вероятность нахождения частицы в единице объема пространства.

В стационарных случаях, т. е. когда функция ψ, которую обычно называют *волновой функцией*, не зависит от времени, ее можно определить, решая так называемое уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \qquad \text{(IV)}$$

где m — масса частицы, $\hbar$ — постоянная Планка, U — потенциальная энергия, которая должна быть задана условиями задачи, E — полная энергия частицы, играющая роль параметра.

Поясним подробнее последнее утверждение. Поскольку квадрат волновой функции $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, то ψ-функция должна еще удовлетворять естественным физическим условиям: она должна быть непрерывной, однозначной и конечной; интеграл же по всему бесконечному пространству от $|\psi|^2$ по самому смыслу этой величины есть вероятность достоверного события, т. е. $\int |\psi|^2 dv = 1$ (условие нормировки).

При этом оказывается, что во многих случаях не при любых значениях полной энергии E решение уравнения Шредингера может удовлетворять указанным физическим условиям. Решая это уравнение и накладывая на ψ стан-