Наконец, если поле со временем не меняется и в нем отсутствуют заряды, уравнение Даламбера вырождается в уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

§ 5. Уравнение Шредингера

Изучение физических свойств молекул, атомов и составляющих их частиц привело в начале XX века исследователей к убеждению, что в микромире существуют свои законы, качественно отличные от законов макромира. Постепенно сущность этих законов была раскрыта и к концу двадцатых годов в атомной физике сложилась стройная логическая система — *квантовая механика*.

Основное утверждение квантовой механики заключается в том, что поведение любой микрочастицы (скажем, электрона) описывается некоторой (вообще говоря, комплексной) функцией координат и времени $\psi(x, y, z, t)$, причем, квадрат модуля этой функции $|\psi|^2$ характеризует *плотность вероятности*, т. е. вероятность нахождения частицы в единице объема пространства.

В стационарных случаях, т. е. когда функция ψ, которую обычно называют *волновой функцией*, не зависит от времени, ее можно определить, решая так называемое уравнение Шредингера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \qquad \text{(IV)}$$

где m — масса частицы, $\hbar$ — постоянная Планка, U — потенциальная энергия, которая должна быть задана условиями задачи, E — полная энергия частицы, играющая роль параметра.

Поясним подробнее последнее утверждение. Поскольку квадрат волновой функции $|\psi|^2$ имеет смысл плотности вероятности, то ψ-функция должна еще удовлетворять естественным физическим условиям: она должна быть непрерывной, однозначной и конечной; интеграл же по всему бесконечному пространству от $|\psi|^2$ по самому смыслу этой величины есть вероятность достоверного события, т. е. $\int |\psi|^2 dv = 1$ (условие нормировки).

При этом оказывается, что во многих случаях не при любых значениях полной энергии E решение уравнения Шредингера может удовлетворять указанным физическим условиям. Решая это уравнение и накладывая на ψ стан-

дартные условия, мы определяем все значения энергии E, которыми может обладать микрочастица при заданных условиях.

Уравнение Шредингера является основным дифференциальным уравнением квантовой механики и, следовательно, одним из самых распространенных типов уравнений в частных производных математической физики.

Мы познакомились с рядом дифференциальных уравнений математической физики. Прежде чем перейти к рассмотрению их решений, сведем в единую таблицу основные типы этих уравнений:

1) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \Delta U$ — волновое уравнение,

2) $\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$ — уравнение теплопроводности,

3) $\Delta \varphi = 0$ — уравнение Лапласа,

4) $\Delta \varphi = -\rho$ — уравнение Пуассона,

5) $\Box \varphi = -\rho$ — уравнение Даламбера,

6) $\Delta \psi + (E - U) \psi = 0$ — уравнение Шредингера.

§ 6. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных

Каждое уравнение в частных производных, как и обыкновенное дифференциальное уравнение, в подавляющем большинстве случаев имеет бесчисленное множество частных решений. Таким образом, любое дифференциальное уравнение (как обыкновенное, так и в частных производных) определяет, вообще говоря, некоторый класс удовлетворяющих этому уравнению функций, совокупность которых образует так называемый общий интеграл (общее решение).

Однако между общими решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и общими решениями уравнений в частных производных имеется существенное различие, из-за чего методы нахождения этих решений в конкретных частных задачах различны.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Его общий интеграл, как известно, представляет собой некоторое семейство функций, зависящее от n произволь-