дартные условия, мы определяем все значения энергии E, которыми может обладать микрочастица при заданных условиях.

Уравнение Шредингера является основным дифференциальным уравнением квантовой механики и, следовательно, одним из самых распространенных типов уравнений в частных производных математической физики.

Мы познакомились с рядом дифференциальных уравнений математической физики. Прежде чем перейти к рассмотрению их решений, сведем в единую таблицу основные типы этих уравнений:

1) $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \Delta U$ — волновое уравнение,

2) $\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$ — уравнение теплопроводности,

3) $\Delta \varphi = 0$ — уравнение Лапласа,

4) $\Delta \varphi = -\rho$ — уравнение Пуассона,

5) $\Box \varphi = -\rho$ — уравнение Даламбера,

6) $\Delta \psi + (E - U) \psi = 0$ — уравнение Шредингера.

§ 6. Понятие об общем интеграле уравнения в частных производных

Каждое уравнение в частных производных, как и обыкновенное дифференциальное уравнение, в подавляющем большинстве случаев имеет бесчисленное множество частных решений. Таким образом, любое дифференциальное уравнение (как обыкновенное, так и в частных производных) определяет, вообще говоря, некоторый класс удовлетворяющих этому уравнению функций, совокупность которых образует так называемый общий интеграл (общее решение).

Однако между общими решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и общими решениями уравнений в частных производных имеется существенное различие, из-за чего методы нахождения этих решений в конкретных частных задачах различны.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Его общий интеграл, как известно, представляет собой некоторое семейство функций, зависящее от n произволь-

ных постоянных (параметров):

$$y = F(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Любое частное решение получается из него, если параметрам $c_1, c_2, \ldots, c_n$ придать определенные значения. Например, в случае уравнения $y'' + y = 0$ общий интеграл имеет вид:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ искомая функция $y(x)$ должна удовлетворять условиям $y/_{t=0} = 1$, $y'/_{t=0} = 1$, то мы легко найдем соответствующие значения параметров c_1 и c_2, подставив в общее решение эти начальные значения для y и y':

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 1,$$
$$y'_0 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 1,$$

откуда $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Следовательно, соответствующее частное решение запишется так:

$$y = \cos t + \sin t.$$

У дифференциального уравнения в частных производных общий интеграл содержит, как мы сейчас увидим, произвольные функции, количество которых равно порядку уравнения.

Пусть дано уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \tag{28}$$

Найдем его общий интеграл, т. е. функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую (28). Для этого сначала запишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Поскольку производная по x от величины, стоящей в скобках, равна нулю, то последняя является некоторой произвольной функцией от y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Поэтому

$$u(x, y) = \int f(y)\, dy.$$

Но интегрируя произвольную функцию $f(y)$, получим новую, также произвольную функцию, скажем $F(y)$, плюс

произвольная функция $\Phi(x)$ переменной x (последняя играет роль постоянной интегрирования у обыкновенных дифференциальных уравнений).

Таким образом, общий интеграл уравнения второго порядка (28)

$$u(x, y) = \Phi(x) + F(y)$$

содержит две произвольные функции.

Еще один пример. Найдем общее решение уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{29}$$

Подставим его в форме:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Тогда сразу ясно, что $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$, где $f(x)$ — какая угодно функция. Интегрируя последнее равенство, находим:

$$u(x, y) = \int f(x)\, dy + \varphi(x),$$

или окончательно:

$$u(x, y) = yf(x) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — тоже произвольная функция от x.

Следовательно, и в этом случае общий интеграл содержит две произвольные функции.

Легко убедиться, что такое положение имеет место и для более сложных уравнений в частных производных. Ниже будет показано, например, что с помощью замены переменных общее уравнение второго порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{30}$$

сводится к одному из простейших уравнений — (23) или (24). Поэтому его общий интеграл также содержит две произвольные функции, положим $\Phi(x)$ и $F(y)$.

Чтобы теперь из общего интеграла уравнения в частных производных найти определенное частное решение, нужно найти конкретный вид функции $\Phi(x)$ и $F(y)$.

Однако — и в этом состоит причина существенного различия методов решения уравнений обыкновенных и в частных производных — из-за чрезвычайной общности общего интеграла уравнения в частных производных, как

правило, очень трудно из него выделить нужное конкретное решение.

Поэтому в математической физике изучают главным образом методы непосредственного нахождения частных решений, удовлетворяющих определенным начальным и граничным условиям.

Следует тем не менее иметь в виду, что общий интеграл несет важную информацию о процессе, описываемом дифференциальным уравнением в частных производных, и эта информация может во многих случаях оказаться весьма полезной и для получения ответа на данную физическую задачу.

В заключение настоящего параграфа покажем, как можно найти общее решение уравнения (30). Полагая, что коэффициент $c \neq 0$, введем новые независимые переменные:

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y, \tag{31}$$

где λ_1 и λ_2 пока произвольные, но различные (иначе ξ и η не будут взаимно независимы) числа.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

то имеет место соответствие

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \to \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Умножим эти вторые производные соответственно на a, $2b$ и c и затем их сложим. Тогда левая часть уравне-

ния (30) примет вид:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} A &= a+2b\lambda_1+c\lambda_1^2,\\ B &= a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2,\\ C &= a+2b\lambda_2+c\lambda_2^2. \end{aligned} \tag{32'}$$

Рассмотрим теперь вспомогательное квадратное уравнение

$$c\lambda^2+2b\lambda+a=0. \tag{30'}$$

Его корнями являются

$$\lambda_{1,2}=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{c}.$$

В зависимости от значения дискриминанта $D=b^2-ac$ возможны три случая:

1) если $D>0$, то корни λ_1 и λ_2 действительны и различны; уравнение принадлежит к гиперболическому типу;
2) если $D<0$, то корни λ_1 и λ_2 комплексны и различны; уравнение (30) является эллиптическим;
3) если $D=0$, то корни λ_1 и λ_2 действительны и равны между собой; уравнение называется параболическим.

Допустим сначала, что $D\neq 0$. Тогда выберем в качестве параметров λ_1 и λ_2 в (31) следующие значения:

$$\lambda_1=\frac{-b+D}{c},\quad \lambda_2=\frac{-b-D}{c}.$$

Тогда коэффициенты A и C в (32) обращаются в нуль, в то время как $B\neq 0$. Поэтому уравнение (30) в переменных ξ и η принимает простейшую форму (28):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}=0.$$

Общее решение этого уравнения нам известно:

$$u=\Phi(\xi)+F(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным x и y, получаем окончательно:

$$u=\Phi(x+\lambda_1 y)+F(x+\lambda_2 y). \tag{33}$$

В том случае, когда уравнение (30) является параболи-

ческим, т. е.

$$D = b^2 - ac = 0,$$

примем $\lambda_1 = -\frac{b}{c}$, а λ_2 — произвольным. Тогда согласно (32′) $A = 0$, $C \neq 0$, а коэффициент B равен нулю при любом λ_2. Таким образом, уравнение (30) сводится к более простому (29):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Его общий интеграл, как показано было выше, имеет вид:

$$u = \eta f(\xi) + \varphi(\xi).$$

Возвращаясь к первоначальным переменным x и y, получаем общий интеграл:

$$u = (x + \lambda_2 y) f(x + \lambda_1 y) + \varphi(x + \lambda_1 y), \tag{34}$$

который также содержит две произвольные функции f и φ.

В следующем параграфе приводится пример, в котором удается получить частное решение из общего.

§ 7. Колебания бесконечной струны

Пусть совершающая колебания упругая струна является столь длинной, что ее можно считать бесконечной. Требуется найти смещение любой точки в произвольный момент времени, начальная форма струны и скорости ее точек заданы.

На языке математической физики эта задача формулируется следующим образом: найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{35}$$

и начальным условиям:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{36}$$

Поскольку струна является бесконечной, то граничные условия не нужны. Такая задача более проста и является частным случаем так называемой *задачи Коши*.

Начнем с нахождения общего интеграла уравнения (35). Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{35′}$$