ческим, т. е.

$$D = b^2 - ac = 0,$$

примем $\lambda_1 = -\frac{b}{c}$, а λ_2 — произвольным. Тогда согласно (32′) $A = 0$, $C \neq 0$, а коэффициент B равен нулю при любом λ_2. Таким образом, уравнение (30) сводится к более простому (29):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Его общий интеграл, как показано было выше, имеет вид:

$$u = \eta f(\xi) + \varphi(\xi).$$

Возвращаясь к первоначальным переменным x и y, получаем общий интеграл:

$$u = (x + \lambda_2 y) f(x + \lambda_1 y) + \varphi(x + \lambda_1 y), \tag{34}$$

который также содержит две произвольные функции f и φ.

В следующем параграфе приводится пример, в котором удается получить частное решение из общего.

§ 7. Колебания бесконечной струны

Пусть совершающая колебания упругая струна является столь длинной, что ее можно считать бесконечной. Требуется найти смещение любой точки в произвольный момент времени, начальная форма струны и скорости ее точек заданы.

На языке математической физики эта задача формулируется следующим образом: найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{35}$$

и начальным условиям:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{36}$$

Поскольку струна является бесконечной, то граничные условия не нужны. Такая задача более проста и является частным случаем так называемой *задачи Коши*.

Начнем с нахождения общего интеграла уравнения (35). Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{35′}$$

Следуя методике решения уравнения (30), рассмотренной в предыдущем параграфе, выпишем коэффициенты уравнения (35):

$$a=1,\quad b=0,\quad c=-1/v^2.$$

Дискриминант $D=b^2-ac=\frac{1}{v^2}>0$, так что уравнение принадлежит к гиперболическому типу. Подставляя значения этих коэффициентов в квадратное уравнение (30′), получаем:

$$-\frac{1}{v^2}\lambda^2+1=0,$$

откуда $\lambda=\pm v$. Вводя теперь новые переменные:

$$\xi=x+\lambda_1 t=x+vt;\quad \eta=x+\lambda_2 t=x-vt,$$

приведем уравнение (35) к простейшему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$$

Таким образом, искомая функция $u(x,\ t)$ согласно (33) предыдущего параграфа равна сумме двух произвольных функций:

$$U=\Phi(x+vt)+F(x-vt). \qquad (33')$$

В указанном виде решение волнового уравнения было впервые получено Даламбером. Выясним его физический смысл.

Примем для простоты, что $\Phi=0$ и смещение колеблющихся точек определяется соотношением:

$$U_1=F(x-vt). \qquad (33'')$$

Возьмем произвольную точку x. В момент времени $t=0$ смещение этой точки равно $F(x)$. Легко видеть, что точно такое же смещение будет в более поздний момент $t>0$ у точки с координатой $x+vt$. А это значит, что отклонение u перемещается вдоль струны вправо со скоростью v. Перемещение в пространстве некоторого переменного (чаще всего периодического) процесса с постоянной скоростью представляет собой распространение прямой волны.

Аналогично решение $U_2=\Phi(x+vt)$ описывает обратную волну, распространяющуюся с той же скоростью вдоль струны влево. Следовательно, решение (33′) представляет собой сумму (суперпозицию) прямой и обратной волн.

Попытаемся теперь выбрать произвольные функции Φ и F так, чтобы выполнялись начальные условия (36). Подставляя в (33′) значение $t=0$, мы в соответствии с (36) найдем, что

$$\Phi(x)+F(x)=\varphi(x). \quad (37)$$

Если же подставить значение $t=0$ в производную от (33′), то получим:

$$v[\Phi'(x)-F'(x)]=\psi(x). \quad (38)$$

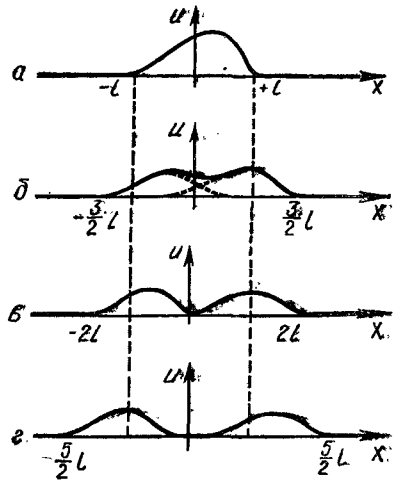

Рис. 32

Равенства (37) и (38) образуют систему уравнений с двумя неизвестными функциями $\Phi(x)$ и $F(x)$. Чтобы определить их, продифференцируем (37) и сопоставим с (38):

$$\Phi'(x)+F'(x)=\varphi'(x), \quad (37')$$

$$\Phi'(x)-F'(x)=\frac{1}{v}\psi(x). \quad (38')$$

Отсюда легко находим, что

$$\Phi'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'+\frac{1}{v}\psi\right],\ F'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'-\frac{1}{v}\psi\right]. \quad (39)$$

Интегрируя эти равенства, установим явный вид функций $\Phi(x)$ и $F(x)$. Таким образом, решение Даламбера задачи Коши для бесконечной струны принимает следующую форму:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\{[\varphi(x+vt)+\varphi(x-vt)]\}+\frac{1}{v}\int_{x-vt}^{x+vt}\psi(x)\,dx. \quad (40)$$

Выясним физический смысл этого решения на двух частных случаях.

1. Пусть начальные скорости точек струны равны нулю ($\psi=0$), а начальное смещение имеют только точки на участке $(-l,\ l)$, как показано на рисунке 32, *а*:

$$\varphi(x)=0, \quad \text{если } |x|>l.$$

Решение (40) принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - vt) + \varphi(x + vt)], \tag{41}$$

т. е. представляет собой сумму двух волн, распространяющихся со скоростью v вправо и влево, амплитуды которых равны половине амплитуды начального смещения $\frac{1}{2}\varphi(x)$. Поэтому, чтобы построить форму струны в некоторый момент времени $t > 0$, нужно график половинного смещения сдвинуть вправо и влево на симметричные отрезки vt и графически сложить эти кривые (рис. 32, *б*).

После момента $t = \frac{l}{v}$ распространяющиеся в противоположные стороны «половинные» волны уже не накладываются друг на друга и расходятся в разные стороны (рис. 32, *в*, *г*).

Последим теперь за поведением точки струны, не получившей начального смещения (координата которой $x > l$ или $x < -l$). Ясно, что до тех пор, пока $t < \frac{x-l}{v}$ аргумент функции $\varphi(x - vt)$ будет больше l, так что смещение равно нулю ($u = 0$) и точка находится в покое. Это будет продолжаться до момента $t_1 = \frac{x-l}{v}$, когда *передний фронт* волны достигнет точки x. Затем, в момент $t_2 = \frac{x+l}{v}$, когда *задний фронт* достигнет точки x, эта точка вновь возвращается в состояние покоя и будет далее оставаться в покое все время. Между моментами t_1 и t_2 волна проходит через точку x, заставляя ее отклоняться.

2. Пусть начальное смещение $\varphi = 0$, а функция $\psi(x)$ отлична от нуля в интервале $(-l, l)$. Этот случай реализуется в результате удара по струне молоточка ширины $2l$ (рис. 33, *а*).

В этом случае решение (41) имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(z)\,dz. \tag{42}$$

Обозначим $\frac{1}{2v}\int_0^x \psi(z)\,dz = \lambda(x)$. Тогда

$$U(x, t) = \lambda(x + vt) - \lambda(x - vt). \tag{43}$$

Таким образом, и в этом случае по струне идут две волны: прямая и обратная. В момент $t=0$ нижний и верхний пределы интегрирования в (42) совпадают. Поэтому $u=0$ (рис. 33, *б*). С ростом t интервал интегрирования, равный $2vt$, увеличивается, а вместе с ним увеличивается и величина интеграла $\int\limits_{x-vt}^{x+vt} \psi(z)\,dz$ (рис. 33, *в*). Когда t достигает значения l/v, точка $x=0$ испытывает наибольшее отклонение, равное (рис. 33, *г*)

$$\frac{1}{2v}\int\limits_{-l}^{l} \psi(z)\,dz = h.$$

В дальнейшем с ростом t величина этого отклонения больше не меняется. Все другие точки струны достигают этого максимального смещения в более поздние моменты времени:

$$t=\frac{|x|+l}{v},$$

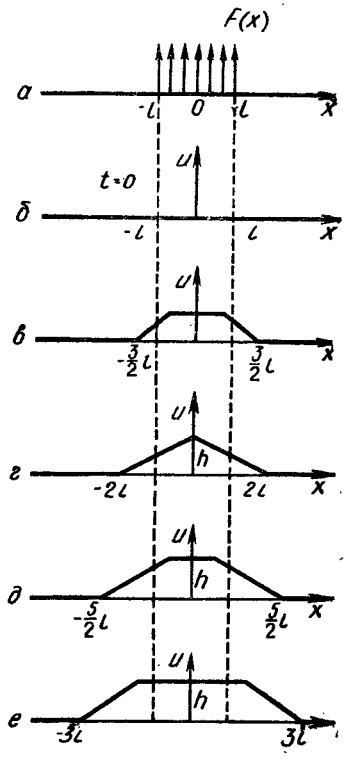

Рис. 33

после чего они как бы «застывают» (рис. 33, *д*, *е*).

Глава II.

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПУТЕМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе мы рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих сущность одного из простейших способов решения уравнений в частных производных — *метода Фурье*.