Таким образом, и в этом случае по струне идут две волны: прямая и обратная. В момент $t=0$ нижний и верхний пределы интегрирования в (42) совпадают. Поэтому $u=0$ (рис. 33, *б*). С ростом t интервал интегрирования, равный $2vt$, увеличивается, а вместе с ним увеличивается и величина интеграла $\int\limits_{x-vt}^{x+vt} \psi(z)\,dz$ (рис. 33, *в*). Когда t достигает значения l/v, точка $x=0$ испытывает наибольшее отклонение, равное (рис. 33, *г*)

$$\frac{1}{2v}\int\limits_{-l}^{l} \psi(z)\,dz = h.$$

В дальнейшем с ростом t величина этого отклонения больше не меняется. Все другие точки струны достигают этого максимального смещения в более поздние моменты времени:

$$t=\frac{|x|+l}{v},$$

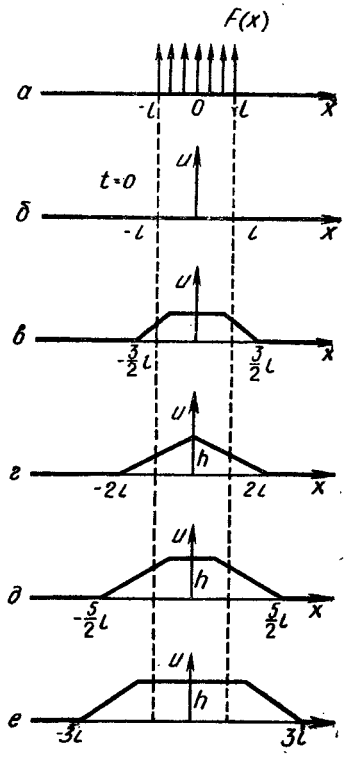

Рис. 33

после чего они как бы «застывают» (рис. 33, *д*, *е*).

Глава II.

НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПУТЕМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе мы рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих сущность одного из простейших способов решения уравнений в частных производных — *метода Фурье*.

§ 1. Охлаждение стержня конечной длины

Пусть концы тонкого теплопроводного стержня длиной l погружены в тающий лед и температура стержня в начальный момент времени ($t=0$) зависит от его координат по некоторому закону $T=f(x)$. Найдем температуру в любой точке стержня в произвольный момент времени.

Сформулируем проблему аналитически.

Так как в стержне нет тепловыделения и тепло распространяется только вдоль стержня, т. е. по оси X, то уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Начальное условие запишется так:

$$T|_{t=0}=\varphi(x). \tag{2}$$

Граничных условий должно быть два, ибо уравнение содержит вторую производную по переменной x; они, очевидно, сводятся к равенствам:

$$T|_{x=0}=0, \quad T|_{x=l}=0. \tag{3}$$

Итак, нужно найти функцию $T=T(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Прежде чем решать эту задачу, упростим уравнение (1), введя замену переменной t:

$$\frac{k}{c\rho}t=\tau. \tag{4}$$

Тогда, как легко видеть, уравнение теплопроводности принимает форму:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1'}$$

а условие (2) запишется в виде:

$$T|_{\tau=0}=\varphi(x). \tag{2'}$$

Что касается краевых условий (3), то они остаются неизменными. Будем теперь искать функцию $T(x, \tau)$, удовлетворяющую уравнению (1′) в виде произведеиия двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$T(x, \tau)=X(x)Y(\tau). \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=X(x)Y'(\tau) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=X''(x)Y(\tau).$$

Подставим эти выражения в (1'):

$$X(x)\,Y'(\tau)=X''(x)\,Y(\tau).$$

Разделив это равенство на XY, получим:

$$\frac{Y'}{Y(\tau)}=\frac{X''}{X(x)}. \qquad (6)$$

В левой части имеем функцию от времени τ, а в правой — функцию от координаты x. Такое равенство возможно тогда и только тогда, когда обе эти функции равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda^2$. Таким образом, уравнение (6) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''+\lambda^2X(x)=0, \qquad (7)$$

$$Y'+\lambda^2Y(\tau)=0. \qquad (8)$$

Интегрирование этих линейных уравнений не представляет труда. Общее решение уравнения (7), как известно, имеет вид:

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x, \qquad (9)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Что касается уравнения первого порядка (8), то оно решается элементарно. Запишем его в виде:

$$\frac{dY}{d\tau}=-\lambda^2Y$$

и разделим переменные:

$$\frac{dY}{Y}=-\lambda^2\,d\tau.$$

Беря интегралы от правой и левой частей, находим:

$$\ln Y=-\lambda^2\tau+\ln C,$$

где C — постоянная интегрирования. Произведя далее потенцирование, получим выражение для функции $Y(\tau)$:

$$Y(\tau)=Ce^{-\lambda^2\tau}. \qquad (10)$$

Ясно, что произведение $X(x)\,Y(\tau)$ будет удовлетворять уравнению (1'), но необходимо еще выполнить условия (2') и (3). Так как на концах стержня $T|_{x=0}=T|_{x=l}=0$, то в нуль должна обращаться в этих точках и функция $X(x)$:

$$X(0)=0,\quad X(l)=0. \qquad (3')$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, нужно соответствующим образом выбрать постоянные A, B и λ.

Начнем с первого равенства (3′). Подставляя в (9) значение $x=0$, имеем:

$$X(0)=A\cos 0+B\sin 0=0, \tag{11}$$

отсюда заключаем, что следует выбрать $A=0$.
Таким образом, функция $X(x)$ принимает вид:

$$X=B\sin\lambda x. \tag{9′}$$

Потребуем далее, чтобы она удовлетворяла и второму условию (3′):

$$X(l)=B\sin\lambda l=0.$$

Здесь имеются две возможности: либо $B=0$, либо $\sin\lambda l=0$. Но решение $B=0$ использовать нельзя, так как в этом случае получается так называемое тривиальное решение $X=0$ и $T=0$, не имеющее физического смысла. Остается принять такое значение параметра λ, чтобы $\sin\lambda l=0$. Отсюда $\lambda l=n\pi$ (где $n=1, 2, 3\ldots$; значение $n=0$ исключаем, так как оно также привело бы к тривиальному решению). Следовательно, постоянная λ может принимать ряд дискретных значений:

$$\lambda_n=n\frac{\pi}{l}. \tag{12}$$

Заменяя в (9′) λ его значениями, приходим к множеству функций:

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{13}$$

где B_n — произвольные постоянные, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям (3′). Аналогично, подставляя (12) в (10), получим множество функций $Y(\tau)$:

$$Y_n(\tau)=C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \tag{14}$$

где C_n — произвольные постоянные. Произведения функций $X_n(x)$ и $Y_n(\tau)$

$$T_n(x,\ \tau)=M_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} \tag{15}$$

(где числа $M_n=B_nC_n$) есть функция двух переменных. Ясно, что любая функция $T_n(x,\ \tau)$ удовлетворяет как уравнению (1′), так и краевым условиям (3).

Чтобы решить задачу, нам остается выбрать коэффициенты M_n таким образом, чтобы удовлетворить еще начальному условию (2'). Анализ этого вопроса, однако, показывает, что поскольку в начальный момент времени ($\tau=0$) функция T_n обращается в

$$T_n(x,\ 0)=M_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

то никаким выбором коэффициента M_n нельзя будет, вообще говоря, удовлетворить начальному условию:

$$T_n|_{\tau=0}=\varphi(x).$$

Имеется, однако, другая возможность. Так как любая линейная комбинация частных решений дифференциального уравнения также удовлетворяет ему, то согласно методу Фурье следует из решений (15) составить ряд, сумма которого запишется так:

$$T(x,\ \tau)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n=\sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau}. \qquad (16)$$

Если этот ряд сходится и его можно дифференцировать, то он тоже является решением уравнения (1'), удовлетворяющим краевым условиям (3).

Выберем теперь значения коэффициентов M_n таким образом, чтобы ряд (16) при $\tau=0$ удовлетворял начальным условиям (2'), т. е. чтобы имело место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x). \qquad (17)$$

Из теории рядов Фурье известно, что любая непрерывная[1] функция $\varphi(x)$ (а с такими функциями мы только и будем встречаться в математической физике), заданная в интервале $(0,\ l)$, может быть разложена в ряд Фурье:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (18)$$

где φ_n — так называемые коэффициенты Фурье, опреде-

[1] Согласно теореме Дирихле функцию $\varphi(x)$ можно разложить в ряд Фурье и в том случае, если она имеет конечное число точек разрыва.

ляемые по формуле:

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{19}$$

Сопоставляя равенства (17) и (18), мы должны заключить, что если в качестве постоянных M_n брать коэффициенты Фурье φ_n, то условие (17) выполняется и ряд

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} \tag{20}$$

удовлетворяет не только уравнению (1′) и граничным условиям (3′), но и начальным условиям (2′). Следовательно, функциональный ряд (20) представляет собой решение нашей задачи.

В заключение сделаем два замечания.

1. Для того чтобы ряд (20), строго говоря, являлся определенным частным решением дифференциального уравнения (1), он должен сходиться и притом так, чтобы его можно было почленно дифференцировать дважды, функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям Дирихле и пр. Однако в конкретных физических задачах все эти условия обычно выполняются.

2. Хотя решение (20) содержит сумму бесконечно большого числа слагаемых, при решении реальных физических задач в большинстве случаев можно ограничиться несколькими первыми членами.

§ 2. Колебания струны конечной длины

Решим методом Фурье задачу о смещениях точек закрепленной с обеих концов струны, совершающей колебания с заданными начальными условиями. Иными словами, найдем функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{21}$$

а также краевым и начальным условиям:

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \tag{22}$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{23}$$

Как и в предыдущем параграфе, ищем решение в виде произведения двух функций:

$$U(x, t) = X(x) T(t). \tag{24}$$