ляемые по формуле:

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{19}$$

Сопоставляя равенства (17) и (18), мы должны заключить, что если в качестве постоянных M_n брать коэффициенты Фурье φ_n, то условие (17) выполняется и ряд

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\tau} \tag{20}$$

удовлетворяет не только уравнению (1′) и граничным условиям (3′), но и начальным условиям (2′). Следовательно, функциональный ряд (20) представляет собой решение нашей задачи.

В заключение сделаем два замечания.

1. Для того чтобы ряд (20), строго говоря, являлся определенным частным решением дифференциального уравнения (1), он должен сходиться и притом так, чтобы его можно было почленно дифференцировать дважды, функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям Дирихле и пр. Однако в конкретных физических задачах все эти условия обычно выполняются.

2. Хотя решение (20) содержит сумму бесконечно большого числа слагаемых, при решении реальных физических задач в большинстве случаев можно ограничиться несколькими первыми членами.

§ 2. Колебания струны конечной длины

Решим методом Фурье задачу о смещениях точек закрепленной с обеих концов струны, совершающей колебания с заданными начальными условиями. Иными словами, найдем функцию $U(x, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{21}$$

а также краевым и начальным условиям:

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \tag{22}$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{23}$$

Как и в предыдущем параграфе, ищем решение в виде произведения двух функций:

$$U(x, t) = X(x) T(t). \tag{24}$$

Взяв вторые частные производные от U по x и t и подставив их в уравнение (21), получим равенство:

$$XT'' = v^2 X'' T.$$

Разделив его на произведение $v^2 XT$, мы отделим переменные:

$$\frac{1}{v^2}\frac{T''}{T(t)} = \frac{X''}{X(x)}. \tag{25}$$

Как уже говорилось в § 1, равенство (25) возможно только в том случае, если обе части его порознь равны одной и той же постоянной. Обозначив последнюю через $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$X'' + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{26}$$

$$T'' + v^2\lambda^2 T(t) = 0. \tag{27}$$

Общие решения их известны:

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \tag{28}$$

$$T = C\cos v\lambda t + D\sin v\lambda t, \tag{29}$$

где A, B, C, D и λ — произвольные постоянные. Их нужно выбрать такими, чтобы удовлетворить условиям (22) и (23). Начнем с граничных условий. Ясно, что искомое решение будет им удовлетворять, если функция $X(x)$ обратится в нуль при $x=0$ и $x=l$. Наложив сначала требование, чтобы $X(0)=0$, мы согласно равенству (28) получим:

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = 0,$$

откуда найдем, что $A=0$. Поэтому выражение (28) упростится:

$$X(x) = B\sin\lambda x. \tag{28'}$$

Теперь потребуем, чтобы $X(l)=0$, т. е.

$$B\sin\lambda l = 0.$$

Отбрасывая тривиальное решение $B=0$, приходим к трансцендентному уравнению для определения λ:

$$\sin\lambda l = 0.$$

Отсюда

$$\lambda l = n\pi,$$

или

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (28′), получим множество функций от x:

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{31}$$

обращающихся на концах интервала $(0, l)$ в нуль и удовлетворяющих уравнению (26).

Аналогично, подставляя в решение (29) значение λ из (30), получаем семейство функций от t, удовлетворяющих уравнению (27):

$$T_n = C_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi v}{l} t. \tag{32}$$

Умножив (31) и (32), мы получим согласно (24) совокупность функций:

$$U_n(x, t) = \left(M_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + N_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{33}$$

(где $M_n = B_n B_n$ и $N_n = B_n D_n$), каждая из которых удовлетворяет уравнению (21) и краевым условиям (22). Такими же свойствами, очевидно, будет обладать любая линейная комбинация из частных решений U_n. Чтобы удовлетворить еще начальным условиям (33), составим бесконечный ряд функций U_n, сумма которого запишется так:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n} \left(M_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + N_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{34}$$

Если этот ряд сходится и его можно почленно дважды дифференцировать как по x, так и по t (эти условия обычно выполняются), то сумма (34) будет удовлетворять уравнению (21) и условиям (22). Как ясно уже из предыдущего примера, идея метода Фурье заключается в том, чтобы путем соответствующего выбора коэффициентов M_n и N_n членов этого ряда удовлетворить и начальным условиям (33). Это значит, что нужно потребовать, чтобы при подстановке в (33) значения $t = 0$ выполнялось равенство:

$$U \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \tag{35}$$

Аналогично после подстановки $t = 0$ в выражение, полученное почленным дифференцированием по времени суммы (34), должно иметь место равенство:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{l} N_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \tag{36}$$

Ясно, что для выполнения условий (35) и (36) постоянные M_n и $N_n \frac{n\pi v}{l}$ должны быть соответственно равны коэффициентам Фурье φ_n и ψ_n. Иными словами, нужно принять

$$M_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad (35')$$

и

$$N_n = \frac{l}{n\pi v} \psi_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \qquad (36')$$

Подставляя указанные значения коэффициентов M_n и N_n в ряд (34), получим функцию в виде следующей суммы ряда:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + \frac{l}{n\pi v} \psi_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (37)$$

В предположении, что имеет место сходимость и дифференцируемость ряда, эта функция и является искомым решением. Рассмотрим его физический смысл.

Каждый член ряда можно представить в виде:

$$U_n = A_n \sin \left(\frac{n\pi v}{l} t + \beta_n \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В таком виде он описывает так называемую *стоячую* волну или *собственное колебание*: все точки струны совершают гармонические колебания с собственной циклической частотой $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$, амплитудой $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ и одинаковой начальной фазой β_n; они одновременно (синфазно) достигают максимальных отклонений или положения равновесия (рис. 34).

Наименьшая собственная частота $\omega_1 = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ называется *частотой основного тона*; тоны кратных частот называются *гармониками* или *обертонами*. Частота ω_1 тем выше, чем короче и легче струна и чем больше ее натяжение T. На рисунке 34 изображены картины колебаний основного тона ($n = 1$) и первых двух обертонов ($n = 2$ и $n = 3$). Таким образом, ряд (37) является суммой или **суперпозицией** стоячих волн с кратными частотами.

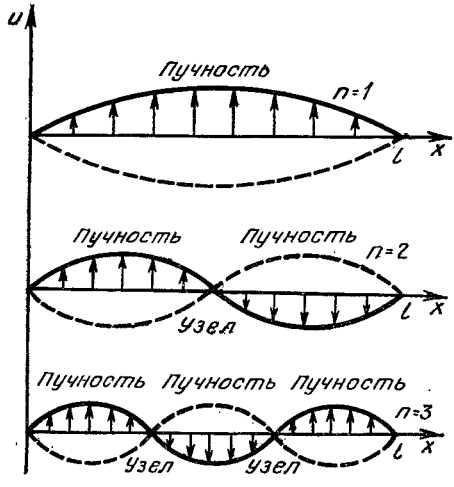

Рис. 34

Как известно, звуки подразделяют на музыкальные, или *ноты*, и немузыкальные, или *шумы*; ноты порождаются периодическими, а шумы — непериодическими колебаниями. В излучаемой музыкальным инструментом ноте всегда присутствует несколько тонов — основной тон и обертоны. Обычно амплитуды гармоник быстро убывают с ростом их номера. Поэтому решающий вклад в ноту вносит основной тон. Обертоны придают звуку тот или иной тембр. Следовательно, физически полученное решение, которое мы запишем теперь в виде:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (37')$$

означает, что струна излучает музыкальную ноту, частота которой равна $\frac{\omega_1}{2\pi}$; определяемая начальными условиями совокупность амплитуд A_1, A_2, ... характеризует спектр (тембр) этой ноты.

§ 3. Решение задачи Дирихле для круга

Мы уже отмечали, что различные физические процессы с математической точки зрения могут быть совершенно подобными. Поэтому в математической физике стремятся разработать единые методы решения задач, объединяющие множество аналогичных проблем.