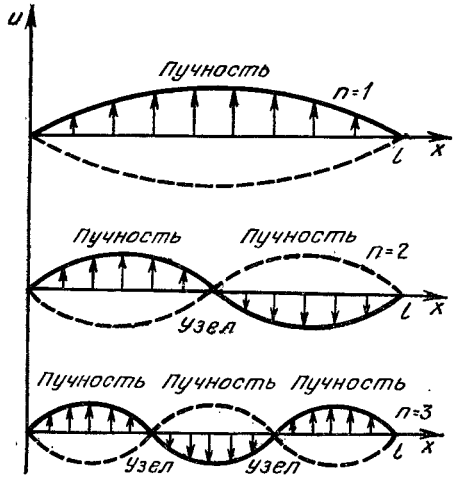

Рис. 34

Как известно, звуки подразделяют на музыкальные, или *ноты*, и немузыкальные, или *шумы*; ноты порождаются периодическими, а шумы — непериодическими колебаниями. В излучаемой музыкальным инструментом ноте всегда присутствует несколько тонов — основной тон и обертоны. Обычно амплитуды гармоник быстро убывают с ростом их номера. Поэтому решающий вклад в ноту вносит основной тон. Обертоны придают звуку тот или иной тембр. Следовательно, физически полученное решение, которое мы запишем теперь в виде:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \beta_n) \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (37')$$

означает, что струна излучает музыкальную ноту, частота которой равна $\frac{\omega_1}{2\pi}$; определяемая начальными условиями совокупность амплитуд A_1, A_2, ... характеризует спектр (тембр) этой ноты.

§ 3. Решение задачи Дирихле для круга

Мы уже отмечали, что различные физические процессы с математической точки зрения могут быть совершенно подобными. Поэтому в математической физике стремятся разработать единые методы решения задач, объединяющие множество аналогичных проблем.

С таким положением мы уже сталкивались на примере задачи Коши для волнового уравнения. Другой типовой задачей такого рода является задача Дирихле: **найти функцию $U(x, y, z)$ (непрерывную вместе со своими производными второго порядка в заданной области), удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ и обращающуюся на поверхности S в заданную функцию координат.**

Рассмотрим для простоты и определенности следующий частный случай задачи Дирихле: **найти распределение температуры $T(x, y)$ для точек круглой пластинки, если на ограничивающей ее окружности G поддерживается неизменная температура, заданным образом зависящая от координат окружности.** Иными словами, необходимо найти регулярную функцию $T(x, y)$, удовлетворяющую в точках круга уравнению $\Delta T = 0$ и краевому условию $T|_G = f(x, y)$.

Ясно, что задачу проще всего решать в полярной (плоской цилиндрической) системе координат (ρ, φ). Согласно гл. III, ч. I, уравнение Лапласа в полярной системе координат имеет вид (см. гл. III, ч. I):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{38}$$

Соответственно краевое условие принимает вид:

$$T\big|_{\rho = a} = f(\varphi). \tag{39}$$

Согласно методу Фурье будем искать решение (38) в виде:

$$T(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi). \tag{40}$$

Определяя отсюда $\frac{\partial T}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$ и подставляя их в (38), получим:

$$\left(R'' + \frac{1}{\rho}R'\right)\Phi(\varphi) + \frac{R}{\rho^2}\Phi''(\varphi) = 0. \tag{40'}$$

Умножим последнее равенство на $\rho^2/R\Phi$:

$$\frac{1}{R}(\rho^2 R'' + \rho R') = \Phi''/\Phi(\varphi).$$

Поскольку по обе стороны знака равенства стоят функции от различных независимых переменных, то такое равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\lambda^2$. Тогда мы приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0, \tag{41}$$

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0. \tag{42}$$

Общий интеграл линейного уравнения (42) нам хорошо знаком:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi. \tag{43}$$

Приступим к решению нелинейного уравнения (41). Для этого прежде всего используем так называемое *условие цикличности*, характерное для криволинейных координат. Оно заключается в том, что и граничная функция $f(\varphi)$, и искомое решение $U(\rho, \varphi)$ должны быть периодическими по переменной φ, т. е.

$$f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$$

и

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi).$$

Отсюда, очевидно, следует, что и функция $\Phi(\varphi)$ должна удовлетворять условию цикличности:

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{44}$$

Но так как $\Phi(\varphi)$ есть линейная комбинация функции $\sin\lambda\varphi$ и $\cos\lambda\varphi$, то для выполнения условия (44) должны выполняться равенства:

$$\sin(\lambda\varphi+\lambda\cdot 2\pi)=\sin\lambda\varphi,$$
$$\cos(\lambda\varphi+\lambda\cdot 2\pi)=\cos\lambda\varphi.$$

Параметр λ должен, следовательно, быть целым числом n (где $n=0, 1, 2, \ldots$). С учетом этого обстоятельства получаем согласно (43) множество функций $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi. \tag{43'}$$

Подставляя теперь в (41) вместо λ^2 его значение n^2, получаем

$$\rho^2R''+\rho R'-n^2R=0. \tag{41'}$$

Это — дифференциальное уравнение типа Эйлера, характерным свойством которого является равенство у всех его членов произведения степени независимой переменной на порядок производной.

Уравнение Эйлера решается сравнительно просто. Его частное решение ищут в виде:

$$R=\rho^s,$$

где s — пока произвольная постоянная. Найдя производные $R'=s\rho^{s-1}$ и $R''=s(s-1)\rho^{s-2}$, подставляем их в (41'). После сокращения на общий множитель ρ^s, приходим к равенству:

$$s(s-1)+s-n^2=0$$

или

$$s^2=n^2.$$

Отсюда

$$s=\pm n.$$

Таким образом, для каждого значения коэффициента n в (41') имеется свое общее решение:

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}.$$

Но так как нас интересуют только регулярные функции, то следует положить $D_n=0$ (в противном случае в точке $\rho=0$ величина R_n обратится в бесконечность).

Следовательно, удовлетворяющее физическим условиям решение уравнения (41') имеет вид:

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n. \tag{45}$$

Перемножая теперь $R_n(\rho)$ и $\Phi_n(\varphi)$, мы согласно (40) получим дискретную совокупность функций:

$$T_n(\rho,\ \varphi)=(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi)\,\rho^n \tag{46}$$

(где $M_n=A_nC_n$, $N_n=B_nC_n$), удовлетворяющих исходному уравнению (38), а также естественным физическим условиям периодичности (однозначности) и регулярности. Чтобы еще удовлетворить граничному условию (39), составим бесконечную сумму:

$$T(\rho,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(M_n\cos n\varphi+N_n\sin n\varphi)\,\rho^n \tag{47}$$

и выберем коэффициенты M_n и N_n таким образом, чтобы при $\rho = a$ этот ряд сходился к функции $f(\varphi)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi)\, a^n = f(\varphi). \tag{48}$$

Из теории рядов Фурье известно, что практически любую функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по синусам и косинусам:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi), \tag{49}$$

где $f_n^{(c)}$ и $f_n^{(s)}$ — коэффициенты Фурье при соответствующих косинусах и синусах ряда, причем

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi.$$

Нулевые коэффициенты определяются следующими формулами:

$$f_0^{(s)} = 0, \quad f_0^{(c)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi.$$

Сопоставляя равенства (48) и (49), заключаем, что для выполнения краевого условия (48) нужно положить:

$$M_n a^n = f_n^{(c)}, \qquad N_n a^n = f_n^{(s)}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для круга может быть представлено в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \times$$

$$\times \left\{ \cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi \right\}. \tag{50}$$

§ 4. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе

Рассматриваемая задача формулируется так: **одна из граней длинного прямоугольного бруса (рис. 35) поддерживается при заданной температуре, на остальных гранях $T = 0$; найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.**

Из симметрии бруса ясно, что температура от Z не зависит и что можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости XOY. Задача состоит в определении функции $T = T(x, y)$, удовлетворяющей