и выберем коэффициенты M_n и N_n таким образом, чтобы при $\rho = a$ этот ряд сходился к функции $f(\varphi)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi)\, a^n = f(\varphi). \tag{48}$$

Из теории рядов Фурье известно, что практически любую функцию $f(\varphi)$ можно разложить в ряд по синусам и косинусам:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi), \tag{49}$$

где $f_n^{(c)}$ и $f_n^{(s)}$ — коэффициенты Фурье при соответствующих косинусах и синусах ряда, причем

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi.$$

Нулевые коэффициенты определяются следующими формулами:

$$f_0^{(s)} = 0, \quad f_0^{(c)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi.$$

Сопоставляя равенства (48) и (49), заключаем, что для выполнения краевого условия (48) нужно положить:

$$M_n a^n = f_n^{(c)}, \qquad N_n a^n = f_n^{(s)}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для круга может быть представлено в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \times$$

$$\times \left\{ \cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi \right\}. \tag{50}$$

§ 4. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе

Рассматриваемая задача формулируется так: **одна из граней длинного прямоугольного бруса (рис. 35) поддерживается при заданной температуре, на остальных гранях $T = 0$; найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.**

Из симметрии бруса ясно, что температура от Z не зависит и что можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости XOY. Задача состоит в определении функции $T = T(x, y)$, удовлетворяющей

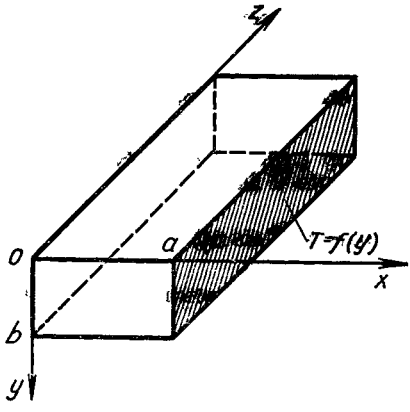

Рис. 35

уравнению стационарной теплопроводности:

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (51)$$

и двум парам краевых условий:

$$T|_{x=0} = 0, \qquad T|_{x=a} = f(y); \quad (52)$$

$$T|_{y=0} = 0, \qquad T|_{y=b} = 0. \quad (53)$$

Как обычно, ищем решение в виде:

$$T(x, y) = X(x)\,Y(y). \quad (54)$$

Дифференцируя (54) дважды по x и y и подставляя в (51), получаем:

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Умножая последнее равенство на $1/(XY)$, разделяем переменные:

$$X''/X = -Y''/Y.$$

Приравнивая обе части постоянной λ^2, приходим к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям:

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad (55)$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0. \quad (56)$$

Решение уравнении (56) мы уже неоднократно записывали:

$$Y(y) = C\cos\lambda y + D\sin\lambda y. \quad (56')$$

Что касается уравнения (55), то его решение, как известно, отличается только тем, что вместо тригонометрических оно содержит гиперболические функции:

$$X(x) = A\,\mathrm{ch}\,\lambda y + B\,\mathrm{sh}\,\lambda y. \quad (55')$$

Выберем теперь постоянные A, B, C, D и λ так, чтобы удовлетворить граничным условиям (52) и (53). Удобнее начать с (53) как более простых. Итак,

$$Y(0) = C = 0.$$

Следовательно,

$$Y(y) = D\sin\lambda y. \quad (56)$$

Наложив второе граничное условие по y:

$$Y(b) = D\sin\lambda b = 0,$$

приходим к выводу, что

$$\lambda b = n\pi,$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Отсюда

$$\lambda_n = n\frac{\pi}{b}.$$

Подставляя эти дискретные значения параметра λ в (55'), получаем множество функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X_n = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b},$$

$$Y_n = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Перемножив теперь $X_n(x)$ на $Y_n(y)$, находим совокупность функций $T_n(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (51) и краевым условиям (53):

$$T_n(x, y) = \left(M_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{57}$$

Теперь осталось удовлетворить условиям (52). Но первому из них, а именно $T|_{x=0} = 0$, мы сразу же удовлетворим, положив $M_n = 0$. Таким образом, совокупность функций:

$$T_n = N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{57'}$$

удовлетворяет не только уравнению (51), но и трем (нулевым) краевым условиям. Чтобы удовлетворить последнему граничному условию $T|_{x=a} = f(y)$, составим бесконечную сумму:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{58}$$

и подберем коэффициенты N_n таким образом, чтобы ряд при $x \longrightarrow a$ сходился к функции $f(y)$:

$$T|_{x=a} = \sum_n N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Отсюда видно, что постоянные множители $N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}$ должны являться коэффициентами f_n разложения в ряд Фурье функции $f(y)$ по синусам:

$$N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} = f_n.$$

Отсюда

$$N_n = \frac{f_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}, \tag{59}$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, dy.$$

Подставляя значения коэффициентов N_n в ряд (58), получаем окончательно:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{60}$$

Полагая, как это обычно бывает, что этот ряд сходится достаточно хорошо, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением.

§ 5. Охлаждение тонкой пластины

Пусть в начальный момент у пластины, толщина которой значительно меньше длины и ширины (рис. 36), температура была распределена по закону $T|_{t=0}=F(x)$. Охлаждение пластины происходит по закону Ньютона, т. е. при $x=\pm a$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha T.$$

Определим температуру произвольной точки в любой последующий момент времени.

Сформулируем задачу аналитически: необходимо найти функцию $T(x, y)$, удовлетворяющую одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{61}$$

и условиям: начальному

$$T|_{t=0}=F(x) \tag{62}$$

и граничному

$$\frac{\partial T}{\partial x}+hT|_{x=\pm a}=0. \tag{63}$$

Приступаем к решению задачи.

Прежде всего, как и в § 1, введем новую независимую переменную $\tau=\frac{k}{c\rho}t$. Тогда уравнение (61) упростится:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{61'}$$

Ищем его интеграл в виде произведения:

$$T(x, \tau)=X(x)Y(\tau). \tag{64}$$

Подставляя (64) в (61), получаем:

$$\frac{X''}{X}=\frac{Y'}{Y}.$$

Приравнивая обе части одной и той же постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$X''+\lambda^2 X=0,$$
$$Y'+\lambda^2 Y=0.$$

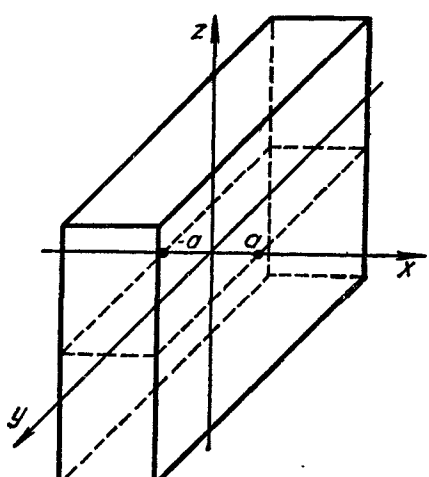

Рис. 36