Полагая, как это обычно бывает, что этот ряд сходится достаточно хорошо, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением.

§ 5. Охлаждение тонкой пластины

Пусть в начальный момент у пластины, толщина которой значительно меньше длины и ширины (рис. 36), температура была распределена по закону $T|_{t=0}=F(x)$. Охлаждение пластины происходит по закону Ньютона, т. е. при $x=\pm a$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha T.$$

Определим температуру произвольной точки в любой последующий момент времени.

Сформулируем задачу аналитически: необходимо найти функцию $T(x, y)$, удовлетворяющую одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{61}$$

и условиям: начальному

$$T|_{t=0}=F(x) \tag{62}$$

и граничному

$$\frac{\partial T}{\partial x}+hT|_{x=\pm a}=0. \tag{63}$$

Приступаем к решению задачи.

Прежде всего, как и в § 1, введем новую независимую переменную $\tau=\frac{k}{c\rho}t$. Тогда уравнение (61) упростится:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{61'}$$

Ищем его интеграл в виде произведения:

$$T(x, \tau)=X(x)Y(\tau). \tag{64}$$

Подставляя (64) в (61), получаем:

$$\frac{X''}{X}=\frac{Y'}{Y}.$$

Приравнивая обе части одной и той же постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$X''+\lambda^2 X=0,$$
$$Y'+\lambda^2 Y=0.$$

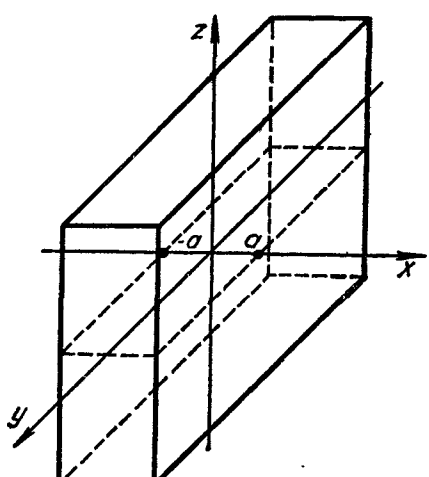

Рис. 36

Решения их нам хорошо известны:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \tag{65}$$

$$Y(\tau) = ce^{-\lambda^2\tau}. \tag{66}$$

Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия не являются нулевыми, то возникает новая ситуация. Так как условия слева и справа от плоскости $x=0$ совершенно одинаковы, то в начальный момент времени температура должна была быть распределенной симметрично:

$$F(x) = F(-x).$$

Поэтому и в последующем распределение температуры должно оставаться симметричным. Таким образом, функции $X(x)$ должна быть четной, т. е.

$$X(-x) = X(x).$$

Отсюда вытекает далее, что коэффициент B в (65) равен нулю и вид функции $X(x)$ упрощается:

$$X(x) = A\cos\lambda x. \tag{65'}$$

Поскольку в краевое условие (63) входит только производная по x и $T(x, \tau) = X(x)Y(\tau)$, то функция $X(x)$ должна удовлетворять условию:

$$X'(a) + hX(a) = 0. \tag{63}$$

Используя (65′), получаем:

$$-A\lambda\sin\lambda a + hA\cos\lambda a = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\lambda a = \frac{h}{\lambda}. \tag{67}$$

Равенство (67) является трансцендентным уравнением для определения λ. Будем решать это уравнение графическим способом, для чего сначала умножим числитель и знаменатель правой части на число a:

$$\operatorname{tg}\lambda a = \frac{ha}{\lambda a}. \tag{67'}$$

Обозначим временно $\lambda a = z$ и построим в системе координат (z, u) графики кривых $u_1 = \operatorname{tg} z$ и $u_2 = \frac{ha}{z}$ (рис. 37). Ясно, что гипербола u_2 пересечет семейство тангенсоид бесчисленное множество раз. Это значит, что уравнение (67′) имеет бесконечное множество корней, причем с ростом $z = \lambda n$ точки пересечения z_n приближаются к $\lambda_n a = n\pi$ (где $n = 1, 2, \ldots$), так как $\operatorname{tg} z_n \longrightarrow 0$. Отметим, что λ_n суть корни уравнения (67′). Отсюда получается множество функций $X(x)$, удовлетворяющих граничному условию (63′):

$$X_n(x) = A_n\cos\lambda_n x. \tag{65''}$$

Подставляя (65″) и (66) в (64), получаем множество функций:

$$T_n = M_n e^{-\lambda_n^2\tau}\cos\lambda_n x,$$

удовлетворяющих уравнению (61) и граничному условию (63). Чтобы получить решение, удовлетворяющее еще и начальному условию,

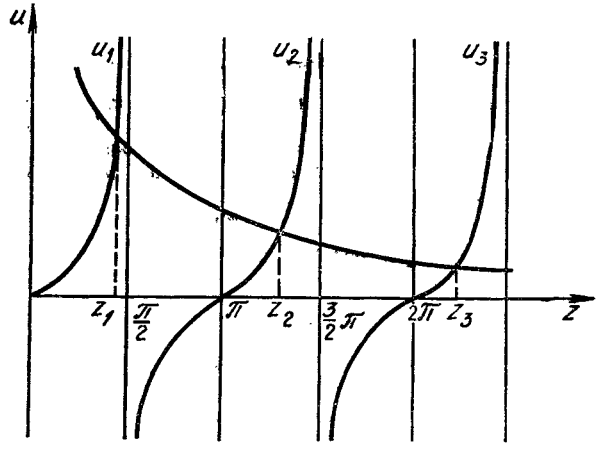

Рис. 37

составляем уже известным нам приемом бесконечную сумму:

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_n M_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos \lambda_n x. \tag{68}$$

Выясним теперь, каковы должны быть коэффициенты M_n, чтобы при $\tau \longrightarrow 0$ ряд, получающийся из функции T_n, сходился к заданной функции $F(x)$, т. е. чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x = F(x). \tag{69}$$

Во всех предыдущих примерах мы сталкивались с разложением функции в ряд по синусам и косинусам кратных аргументов, т. е. с рядами Фурье. В левой части же равенства (69) стоит бесконечная сумма косинусов, аргументы которых отличаются нецелочисленными множителями λ_n.

Легко, однако, показать, что функции $\cos \lambda_n x$ ивляются взаимно ортогональными, т. е.

$$\int_{-a}^{a} \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x \, dx = 0.$$

С другой стороны, они не нормированы, т. е.

$$\int_{-a}^{a} \cos^2 \lambda_n \, dx \neq 1.$$

В теории рядов Фурье доказывается, что произвольную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по семейству ортогональных ненорми-

рованных функций $X_1(x)$, $X_2(x)$, ...:

$$f(x)=\sum_n f_n X_n(x).$$

Но в отличие от обычных рядов Фурье обобщенные коэффициенты Фурье f_n определяются по формуле:

$$f_n=\left[\int_{-a}^{a} X_n^2\,dx\right]^{-1}\int_{-a}^{a} f(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Таким образом, для удовлетворения условия (69) необходимо положить произвольные числа M_n равными обобщенным коэффициентам Фурье:

$$M_n=F_n=\frac{\int_{-a}^{a} F(x)\cos\lambda_n x\cdot dx}{\int_{-a}^{a}\cos^2\lambda_n x\cdot dx}.$$

Подставляя теперь значения M_n в (68), получаем окончательное выражение для искомой функции $T(x, t)$:

$$T(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{k}{c\rho}\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x. \tag{70}$$

§ 6. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T\,|_{t=0}=f(x). \tag{71}$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t>0$.

Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $T(x, \tau)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{72}$$

$\left(\text{где } \tau=\frac{k}{c\rho}t\right)$ и начальному условию (71).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в § 1 этой главы с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение уравнения (72) в виде:

$$T(x, \tau)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-\lambda^2\tau}. \tag{73}$$

В случае стержня конечной длины l мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ:

$$\lambda_n=n\frac{\pi}{l},$$