рованных функций $X_1(x)$, $X_2(x)$, ...:

$$f(x)=\sum_n f_n X_n(x).$$

Но в отличие от обычных рядов Фурье обобщенные коэффициенты Фурье f_n определяются по формуле:

$$f_n=\left[\int_{-a}^{a} X_n^2\,dx\right]^{-1}\int_{-a}^{a} f(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Таким образом, для удовлетворения условия (69) необходимо положить произвольные числа M_n равными обобщенным коэффициентам Фурье:

$$M_n=F_n=\frac{\int_{-a}^{a} F(x)\cos\lambda_n x\cdot dx}{\int_{-a}^{a}\cos^2\lambda_n x\cdot dx}.$$

Подставляя теперь значения M_n в (68), получаем окончательное выражение для искомой функции $T(x, t)$:

$$T(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-\frac{k}{c\rho}\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x. \tag{70}$$

§ 6. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T\,|_{t=0}=f(x). \tag{71}$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t>0$.

Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $T(x, \tau)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{72}$$

$\left(\text{где } \tau=\frac{k}{c\rho}t\right)$ и начальному условию (71).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в § 1 этой главы с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение уравнения (72) в виде:

$$T(x, \tau)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-\lambda^2\tau}. \tag{73}$$

В случае стержня конечной длины l мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра λ:

$$\lambda_n=n\frac{\pi}{l},$$

где каждому значку n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n. Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\frac{\pi}{l}$ и стремится к нулю, когда $l \longrightarrow \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞.

Таким образом, каждому значению λ соответствует частное решение:

$$T_\lambda(x, \tau) = [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda^2\tau}. \qquad (73)$$

Общее решение получается из частных решений (73′), не суммированием, а интегрированием по параметру λ:

$$T(x, \tau) = \int_0^\infty T_\lambda\, d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda^2\tau}\, d\lambda. \qquad (74)$$

Полагая, что интеграл (74) сходящийся и дифференцируемый по x и τ (это обычно имеет место), можно быть уверенным в том, что функция $T(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению (72). Но решение еще должно удовлетворять начальному условию:

$$T\big|_{\tau=0} = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda = f(x). \qquad (75)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции $f(x)$ в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

может быть представлена в виде интеграла от гармонических функций $\cos\lambda x$ и $\sin\lambda x$, частота которых λ пробегает непрерывную совокупность значений:

$$f(x) = \int_0^\infty [f_c(\lambda)\cos\lambda x + f_s(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda, \qquad (76)$$

где

$$f_c(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx. \qquad (77)$$

Подставляя значения Фурье-преобразований $f_c(\lambda)$ и $f_s(\lambda)$ в интеграл (76), получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi\right] d\lambda,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(\cos\lambda x\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\sin\lambda\xi)\,d\xi.$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi. \tag{78}$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (74) выбрать соответственно

$$A(\lambda)=f_c(\lambda),\quad B(\lambda)=f_s(\lambda),$$

то интеграл

$$T(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f_c(\lambda)\cos\lambda x+f_s(\lambda)\sin\lambda x]\,e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \tag{79}$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения получается из (78):

$$T(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2\tau}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\,d\xi. \tag{80}$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, меняя порядок интегрирования:

$$T(x,\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi\int_0^\infty e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda. \tag{80'}$$

Обозначив $\xi-x=q$, можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу:

$$K(\tau,q)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\tau\lambda^2}\cos\lambda q\,d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \tag{81}$$

Заменяя обратно q через $\xi-x$ и подставляя (81) в (80′), получаем окончательно:

$$T(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi. \tag{82}$$

Чтобы понять физический смысл полученного решении, допустим, что в начальный момент времени ($\tau=0$) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки $x=0$, где $T=T_0$ (рис. 38). Можно себе представить, что в момент

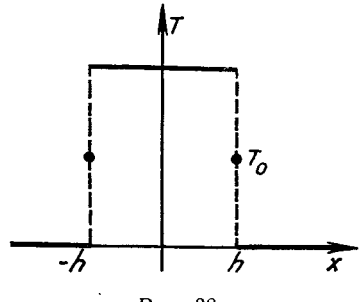

Рис. 38

$\tau=0$ элементу длины $2h$ стержня сообщили некоторое количество тепла $Q_0=2hc\rho T_0$, которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения T_0.

Следовательно, формула (82) принимает вид:

$$T(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-h}^{h}T_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi=\frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi\tau}\,c\rho}\int_{-h}^{h}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}d\xi}.$$

Будем теперь уменьшать h, устремляя его к нулю, считая количество тепла Q_0 неизменным, т. е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла напряжения Q_0, помещенного в момент времени $\tau=0$ в точке $x=0$. При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой:

$$T(x,\tau)=\frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi\tau}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi,$$

или

$$T(x,\tau)=\frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \qquad (83)$$

В частности, если $Q_0=c\rho$, то температура любой точки стержня в произвольный момент времени $t=\frac{\tau}{a}$ (a — коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле:

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}e^{-\frac{x^2}{4at}}. \qquad (84)$$

Графически решение для различных моментов времени представлено на рисунке 39. Заметим, что величина

$$c\rho\int_{-\infty}^{\infty}T(x,t)\,dx$$

есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t:

$$Q(t)=c\rho\int_{-\infty}^{\infty}T(x,t)\,dx=$$

$$=\frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4at}}dx.$$

Но последний (справа) интеграл есть интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

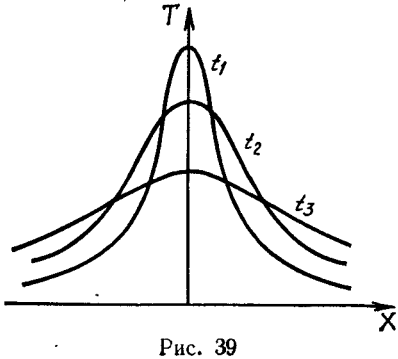

Рис. 39

Поэтому получаем, что

$$Q(t) = c\rho = Q_0 = \text{const},$$

что согласуется с законом сохранения энергии.

Глава III.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя

Как показано было в ч. I, уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Будем искать решение этого уравнения методом Фурье, имея в виду, что искомая функция $U(\rho, \varphi, z)$ зависит от трех переменных.

Положим, что

$$U(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z)\,\Phi(\varphi) \tag{2}$$

и подставим это произведение в (1). Тогда

$$\frac{\Phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}V\Phi'' + \Phi\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Если полученное равенство умножить на $\frac{\rho^2}{V\Phi}$ и член, зависящий от φ, перенести вправо, то придем к равенству:

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)}.$$

Но равенство двух функций от различных аргументов возможно тогда и только тогда, когда обе они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через ν^2, получаем два уравнения:

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\nu^2 = 0, \tag{3}$$

$$\Phi'' + \nu^2\Phi(\varphi) = 0. \tag{4}$$

Поскольку (3) является уравнением в частных производных, то применим к нему метод Фурье с целью разделения переменных. Итак, пусть

$$V(\rho, z) = R(\rho)\,Z(z), \tag{5}$$