Поэтому получаем, что

$$Q(t) = c\rho = Q_0 = \text{const},$$

что согласуется с законом сохранения энергии.

Глава III.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя

Как показано было в ч. I, уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Будем искать решение этого уравнения методом Фурье, имея в виду, что искомая функция $U(\rho, \varphi, z)$ зависит от трех переменных.

Положим, что

$$U(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z)\,\Phi(\varphi) \tag{2}$$

и подставим это произведение в (1). Тогда

$$\frac{\Phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}V\Phi'' + \Phi\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Если полученное равенство умножить на $\frac{\rho^2}{V\Phi}$ и член, зависящий от φ, перенести вправо, то придем к равенству:

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)}.$$

Но равенство двух функций от различных аргументов возможно тогда и только тогда, когда обе они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через ν^2, получаем два уравнения:

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{\rho^2}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\nu^2 = 0, \tag{3}$$

$$\Phi'' + \nu^2\Phi(\varphi) = 0. \tag{4}$$

Поскольку (3) является уравнением в частных производных, то применим к нему метод Фурье с целью разделения переменных. Итак, пусть

$$V(\rho, z) = R(\rho)\,Z(z), \tag{5}$$

Деля (3) на ρ^2 и подставляя в него (5), приходим опять к равенству:

$$\frac{Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R')-\frac{\nu^2}{\rho^2}RZ+RZ''=0.$$

Делим далее на произведение RZ и переносим вправо член, зависящий от z:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}(\rho R')-\frac{\nu^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z(z)}.$$

Мы получили равенство двух функций от различных аргументов. Приравнивая обе части этого равенства постоянной λ^2, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{d\rho}(\rho R')+\left[\lambda^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right]R=0. \tag{6}$$

$$Z''-\lambda^2 Z=0. \tag{7}$$

Ясно, что совокупность уравнений (4), (6) и (7) эквивалентна исходному уравнению Лапласа (1) и позволяет в принципе определить функции $\Phi(\varphi)$, $R(\rho)$, $Z(z)$, а следовательно, и искомую функцию U, которая согласно (2) и (5) равна:

$$U(\rho, \varphi, z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z). \tag{8}$$

Поскольку дифференциальные уравнения (4) и (7) являются хорошо известными линейными и однородными уравнениями второго порядка, то их общие решения можно сразу же написать:

$$\Phi(\varphi)=A\cos\nu\varphi+B\sin\nu\varphi, \tag{9}$$

$$Z(z)=C\operatorname{ch}\lambda z+D\operatorname{sh}\lambda z. \tag{10}$$

Таким образом, задача сводится к решению дифференциального уравнения (6) с переменными коэффициентами. Его, очевидно, можно представить так:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\lambda^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{6'}$$

Если ввести новую независимую переменную $x=\lambda\rho$, то (6′) несколько упрощается и принимает форму так называемого уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0. \tag{11}$$

Интегралы этого уравнения $R_\nu(x)$ называются *цилиндрическими функциями* или *функциями Бесселя*.

Перейдем теперь к рассмотрению методов определения решения уравнения (11).