§ 2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя

Запишем уравнение Бесселя в виде:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{12}$$

и будем искать его решение в форме ряда:

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}. \tag{13}$$

Первая и вторая производные этого ряда запишутся так:

$$y' = \sum_{k=0} a_k (k+s) x^{k+s-1}, \tag{13'}$$

$$y'' = \sum_{k=0} a_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}. \tag{13''}$$

Умножим (13) на $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$ и (13′)—на $\frac{1}{x}$ и полученные выражения вместе с (13″) подставим в (12):

$$\sum_{k=0} a_k x^{k+s} + \sum_{k=0} a_k x^{k+s-2} [(k+s)(k+s-1) + (k+s) - \nu^2] = 0.$$

Произведя сокращение на x^{s-2} и упрощения в квадратных скобках, преобразуем это тождественное равенство следующим образом:

$$\sum_{k=0} a_k x^{k+s} \equiv -\sum_{k=0} a_k x^k [(k+s)^2 - \nu^2].$$

Ряд слева начинается с x^2, а ряд справа—с x в нулевой степени. Отсюда следует, что коэффициенты перед x^0 и x^1 равны нулю:

$$a_0 (s^2 - \nu^2) = 0, \tag{14}$$

$$a_1 [(1+s)^2 - \nu^2] = 0. \tag{14'}$$

Что касается коэффициентов при более высоких степенях x, то они должны удовлетворять рекуррентному равенству:

$$a_{k-2} = -a_k [(k+s)^2 - \nu^2], \tag{15}$$

где $k = 2, 3, \ldots$.

Из (14) вытекает, что $s = \pm\nu$ и $a_1 = 0$. Положим сначала, что $s = +\nu$, тогда согласно (15)

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \tag{15'}$$

где $k = 2, 3, \ldots$. Поскольку $a_1 = 0$, то и все последующие нечетные коэффициенты $a_3, a_5, a_7, \ldots$ также

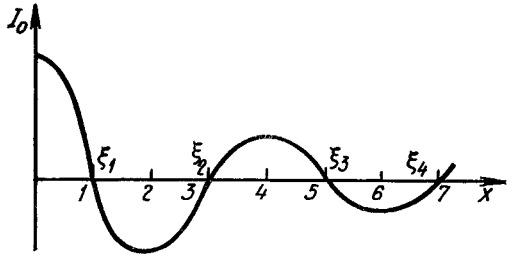

Рис. 40

равны нулю. Что касается четных коэффициентов, то их легко выразить через a_0 по формуле (15′):

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)}. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (13), получаем частное решение уравнения Бесселя (12):

$$y_1(x) = I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)\ldots(k+\nu)}. \qquad (17)$$

С помощью признака сходимости Даламбера можно показать, что ряд (17) сходится при любых значениях x. Характеризуемая им функция $I_\nu(x)$ называется *бесселевой функцией первого рода порядка* ν.

Бесселевы функции первого рода $I_\nu(x)$ хорошо изучены, для них составлены таблицы.

При $x \gg 1$ функцию Бесселя можно заменить ее асимптотической формулой:

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (18)$$

из которой видно, что для больших x кривая $I_\nu(x)$ приблизительно представляет собой затухающую косинусоиду (на рисунке 40 приведен график бесселевой функции нулевого порядка). Ясно, что функции $I_\nu(x)$ имеют бесчисленное множество корней $\xi_k^{(\nu)}$ (где $k = 1, 2, \ldots$), для которых $I_\nu(\xi_k^{(\nu)}) = 0$.

Итак, функция Бесселя первого рода $I_\nu(x)$ является одним частным решением $y_1(x)$ уравнения (12). Чтобы написать его общее решение, нужно знать второе линейно-независимое частное решение $y_2(x)$. В теории бесселевых функций показывается, что в том случае, когда параметр ν является не целым числом, это второе частное решение можно получить, положив $s=-\nu$:

$$y_2(x)=I_{-\nu}(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k}k!\,(1-\nu)\ldots(k-\nu)}. \qquad (17')$$

Это тоже бесселева функция первого рода, но отрицательного порядка, ее график подобен затухающей косинусоиде.

В случае нецелочисленности ν общий интеграл уравнения Бесселя имеет вид:

$$y(x)=C_1I_\nu(x)+C_2I_\nu(x). \qquad (19)$$

Однако, если ν есть целое число ($\nu=n$), то функция $I_{-n}(x)$ отличается от $I_n(x)$ только постоянным множителем (-1). Иными словами, $I_n(x)$ и $I_{-n}(x)$ линейно-зависимы и из них общий интеграл нельзя составить.

В этом случае в качестве второго независимого частного решения выбирают функцию Бесселя второго рода $Y_n(x)$, которую еще называют *функцией Неймана*.

Мы не будем строго выводить выражение для $Y_n(x)$, а ограничимся ее асимптотической формулой, справедливой при $x\gg 1$:

$$Y_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (20)$$

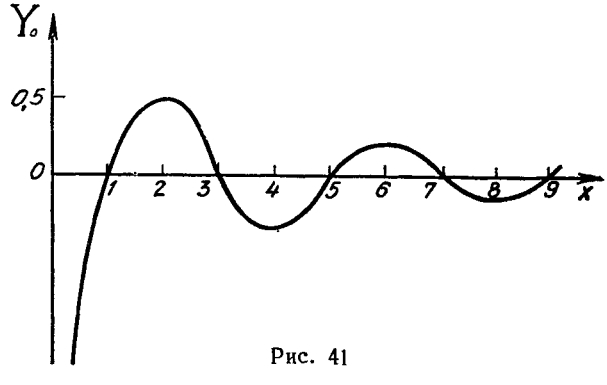

Рис. 41

Наиболее существенное свойство функции Y_n состоит в том, что при $x \to 0$ функции Неймана любого порядка стремятся к бесконечности:

$$Y_n(0) = -\infty. \tag{20'}$$

На рисунке 41 приведен график функции Неймана нулевого порядка. Таким образом, при $\nu = n$ общий интеграл уравнения Бесселя (12) выражается следующей формулой:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x). \tag{21}$$

В следующем параграфе рассматривается конкретный пример, в котором используются функции Бесселя.

§ 3. Решение задачи Дирихле для цилиндра

Пусть дан цилиндр высоты h и радиуса a (рис. 40), на боковой поверхности и верхнем торце которого температура равна нулю, а на нижнем торце поддерживается постоянная температура по закону $T = F(\rho)$. Найдем распределение температуры в таком цилиндре.

Чтобы сформулировать задачу аналитически, примем во внимание, что из ее условий вытекает симметричность распределения температуры по углу φ. Поэтому $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ и уравнение Лапласа упрощается:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{22}$$

Граничные условия выражаются так:

$$T|_{\rho=a} = 0, \quad T|_{z=h} = 0, \tag{23}$$

$$T|_{z=0} = F(\rho). \tag{24}$$

Согласно методу Фурье представим искомую функцию в виде произведения:

$$T(\rho, z) = R(\rho)\, Z(z). \tag{25}$$

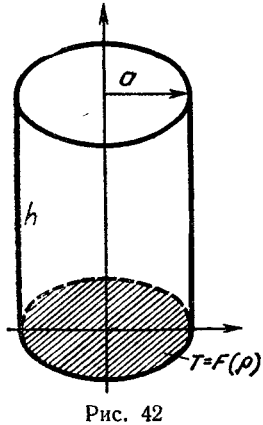

Рис. 42

Подставив это произведение в исходное уравнение (22), имеем:

$$Z\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') + RZ'' = 0.$$

Деля это равенство на RZ и перенося второе слагаемое вправо, получаем:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}(\rho R') = -\frac{Z''}{Z(z)}.$$

Приравнивая, как обычно, обе части равенства постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум