Наиболее существенное свойство функции Y_n состоит в том, что при $x \to 0$ функции Неймана любого порядка стремятся к бесконечности:

$$Y_n(0) = -\infty. \tag{20'}$$

На рисунке 41 приведен график функции Неймана нулевого порядка. Таким образом, при $\nu = n$ общий интеграл уравнения Бесселя (12) выражается следующей формулой:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x). \tag{21}$$

В следующем параграфе рассматривается конкретный пример, в котором используются функции Бесселя.

§ 3. Решение задачи Дирихле для цилиндра

Пусть дан цилиндр высоты h и радиуса a (рис. 40), на боковой поверхности и верхнем торце которого температура равна нулю, а на нижнем торце поддерживается постоянная температура по закону $T = F(\rho)$. Найдем распределение температуры в таком цилиндре.

Чтобы сформулировать задачу аналитически, примем во внимание, что из ее условий вытекает симметричность распределения температуры по углу φ. Поэтому $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ и уравнение Лапласа упрощается:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{22}$$

Граничные условия выражаются так:

$$T|_{\rho=a} = 0, \quad T|_{z=h} = 0, \tag{23}$$

$$T|_{z=0} = F(\rho). \tag{24}$$

Согласно методу Фурье представим искомую функцию в виде произведения:

$$T(\rho, z) = R(\rho)\, Z(z). \tag{25}$$

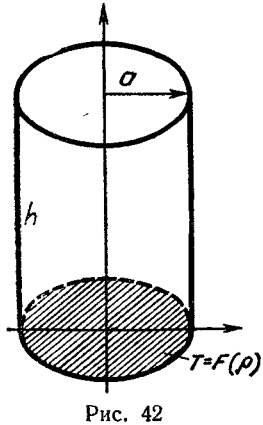

Рис. 42

Подставив это произведение в исходное уравнение (22), имеем:

$$Z\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') + RZ'' = 0.$$

Деля это равенство на RZ и перенося второе слагаемое вправо, получаем:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}(\rho R') = -\frac{Z''}{Z(z)}.$$

Приравнивая, как обычно, обе части равенства постоянной $-\lambda^2$, приходим к двум

обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$Z'' - \lambda^2 Z(z) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho R') + \lambda^2 R = 0 \tag{27}$$

Общий интеграл уравнения (26) записывается сразу:

$$Z(z) = A \operatorname{ch} \lambda z + B \operatorname{sh} \lambda z. \tag{28}$$

Что касается (27), то оно является уравнением Бесселя нулевого порядка от независимой переменной ($\lambda\rho$):

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \lambda^2 R = 0. \tag{27'}$$

Его общее решение согласно (21) имеет вид:

$$R(\rho) = C I_0(\lambda\rho) + D Y_0(\lambda\rho). \tag{29}$$

Из условия конечности решения во всех точках цилиндра следует, что $D=0$. В противном случае для точек на оси z, т. е. при $\rho=0$, мы бы получили $R \longrightarrow \infty$ (так как $|Y_0(0)| = \infty$).

Итак,

$$R(\rho) = C I_0(\lambda\rho). \tag{29'}$$

Потребуем теперь, чтобы на поверхности цилиндра $R(a)=0$:

$$I_0(\lambda a) = 0. \tag{30}$$

Отсюда находим параметр λ:

$$\lambda a = \xi_n^0, \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{\xi_n^0}{a}, \tag{31}$$

где ξ_n^0 — корни бесселевой функции нулевого порядка. Подставляя (31) в (29), получаем:

$$R_n(\rho) = C_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \tag{32}$$

Умножая (32) на (28), находим множество функций:

$$T_n(\rho, z) = \left[M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right)\right] I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right), \tag{33}$$

удовлетворяющих уравнению (22) и первому из граничных условий (23).

Чтобы удовлетворить еще второму граничному условию ($T|_{z=h}=0$), необходимо положить

$$M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) = 0. \tag{34}$$

Отсюда

$$N_n = M_n \operatorname{cth}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right). \tag{35}$$

Подставляя (35) в (33) и учтя формулу для гиперболического синуса

разности двух углов, мы приходим к соотношению:

$$T_n = M_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \tag{36}$$

Нам осталось еще удовлетворить граничному условию (24). Для этого составим из решений T_n бесконечную сумму:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) \tag{37}$$

и потребуем, чтобы при $z=0$ она сходилась к $F(\rho)$:

$$T(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) = F(\rho). \tag{38}$$

Задача теперь свелась к разложению функции $F(\rho)$ в ряд по бесселевым функциям нулевого порядка.

В теории цилиндрических функций доказывается, что две различные функции одного порядка обобщенно ортогональны, т. е.

$$\int_0^a \rho I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) I_0\left(\xi_m^0 \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0$$

при $m \neq n$. Поэтому любую функцию $F(\rho)$ можно разложить в ряд Фурье—Бесселя:

$$F(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \tag{39}$$

При этом коэффициенты Фурье—Бесселя F_n вычисляются по формуле

$$F_n = \frac{2}{a^2\left[I_1(\xi_n^0)\right]^2} \int_0^a \rho F(\rho) I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) d\rho. \tag{40}$$

Таким образом, полагая $M_n = F_n$, получаем окончательное решение задачи в виде суммы ряда:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \tag{41}$$