Глава IV.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Уравнение Лежандра

Уравнение Лапласа в координатах (r, θ, φ) записывается так:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{1}$$

Следуя методу Фурье, ищем решение этого уравнения в виде произведения:

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y(\theta, \varphi). \tag{2}$$

Подставляем (2) в (1), получаем:

$$\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2R') + \frac{R}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right\} = 0.$$

Умножим это равенство на r^2/RY, приводим его к виду:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2R') = \frac{1}{Y}\Lambda Y, \tag{3}$$

где Λ — так называемый *оператор Лежандра*, равный

$$\Lambda = -\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{4}$$

Приравнивая обе части равенства (3) постоянной λ, приходим к двум уравнениям:

$$\frac{d}{dr}(r^2R') - \lambda R = 0, \tag{5}$$

$$\Lambda Y - \lambda Y = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) в развернутом виде выглядит так:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{6'}$$

Как видно, это уравнение в частных производных. Поэтому вновь применим метод Фурье.

Представим $Y(\theta, \varphi)$ в виде произведения:

$$Y = V(\theta)\,\Phi(\varphi) \tag{7}$$

и подставим это выражение в (6′). Тогда

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\frac{dV}{d\theta}\right)+\frac{V}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda V\Phi=0.$$

Умножив последнее равенство на $\frac{\sin^2\Theta}{\Phi V}$ и разделив переменные, приходим к равенству:

$$\frac{\sin\Theta}{V}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta V')+\lambda\sin^2\theta=\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Приравнивая обе части постоянной $-\nu^2$, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi''+\nu^2\Phi=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta V'\right)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)V(\theta)=0. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) нам удобнее представить в показательной форме:

$$\Phi(\varphi)=Ae^{i\nu\varphi}+Be^{-i\nu\varphi}. \tag{10}$$

Так как обычно функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет условию цикличности

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),$$

то можно сделать вывод, что значение ν не может быть произвольным, а обязательно является целочисленным:

$$\nu=m=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Следовательно, функция $(\Phi)\varphi$ принимает форму:

$$\Phi=Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi}, \tag{10′}$$

а уравнение (9) соответственно запишется так:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta}+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)V=0. \tag{9′}$$

Уравнение (9′) называют *обобщенным уравнением Лежандра*. Если ввести новую независимую переменную $x=\cos\theta$ (при этом $-1\leqslant x\leqslant 1$) и обозначить $V(\theta)=y(x)$, то обобщенное уравнение Лежандра принимает обычный вид [1]):

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y-\frac{m^2}{1-x^2}y=0. \tag{11}$$

---

[1]) Действительно, $x=\cos\theta$, $dx=-\sin\theta\,d\theta$. Поэтому

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cdot y',$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)\frac{dx}{d\theta}=(1-x^2)y''.$$

Подставляя $\frac{d^2V}{d\theta^2}$ и $\frac{dV}{d\theta}$ в (9), приходим к (11).

При $m=0$ это уравнение имеет более простую форму уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0. \tag{12}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решений уравнения Лежандра (9′) и радиального уравнения (5). Обозначая их интегралы соответственно через $V(\theta)$ и $R(r)$, представим искомую функцию в форме следующего произведения:

$$U(r,\ \theta,\ \varphi)=R(r)V(\theta)\Phi(\varphi), \tag{13}$$

где $\Phi(\varphi)$ имеет вид (10′).

Перейдем теперь к изучению методов решений уравнений (9′) и (5).

§ 2. Решение уравнения Лежандра

Будем искать интеграл уравнения Лежандра (12) с переменными коэффициентами в виде ряда:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{14}$$

Дифференцируя (14), получаем:

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \tag{14'}$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}. \tag{14''}$$

Умножив $y''(x)$ на $(1-x^2)$ и y' на $2x$ и подставив полученные выражения в (12), приходим к равенству:

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k=0.$$

Перенесем все члены, содержащие x в k-й степени, вправо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}\equiv\sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1)+2k-\lambda]a_k x^k,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}\equiv\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)k-\lambda]a_k x^k. \tag{15}$$

Поскольку согласно (15) должно иметь место равенство коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях равенства, то

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}=[k(k+1)-\lambda]a_k.$$