

При $m=0$ это уравнение имеет более простую форму уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решений уравнения Лежандра (9') и радиального уравнения (5). Обозначая их интегралы соответственно через $V(\theta)$ и $R(r)$, представим искомую функцию в форме следующего произведения:

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)V(\theta)\Phi(\varphi), \quad (13)$$

где $\Phi(\varphi)$ имеет вид (10').

Перейдем теперь к изучению методов решений уравнений (9') и (5).

§ 2. Решение уравнения Лежандра

Будем искать интеграл уравнения Лежандра (12) с переменными коэффициентами в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (14)$$

Дифференцируя (14), получаем:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad (14')$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \quad (14'')$$

Умножив $y''(x)$ на $(1-x^2)$ и y' на $2x$ и подставив полученные выражения в (12), приходим к равенству:

$$(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Перенесем все члены, содержащие x в k -й степени, вправо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + 2k - \lambda] a_k x^k,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)k - \lambda] a_k x^k. \quad (15)$$

Поскольку согласно (15) должно иметь место равенство коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях равенства, то

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} = [k(k+1) - \lambda] a_k.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad (16)$$

позволяющую выразить все четные коэффициенты ряда (14) через a_0 и все нечетные через a_1 .

Таким образом, ряд (14) с коэффициентами, определяемыми по формуле (16) и с произвольными значениями a_0 и a_1 , является общим решением уравнения Лежандра (12).

Обратим теперь внимание на то, что согласно равенству (16) при $a_1=0$ все нечетные коэффициенты ряда (14) обращаются в нуль ($a_3=a_5=a_7=\dots=0$). При этом получим «четный» ряд:

$$y_0(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, \quad (17)$$

являющийся частным решением уравнения (12). Аналогично, положив $a_0=0$ (но $a_1 \neq 0$), получим «нечетный» ряд:

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots, \quad (18)$$

представляющий собой второе частное решение уравнения (12). При этом коэффициенты рядов (17) и (18) вычисляются по формуле (16).

Таким образом, общее решение исходного уравнения можно записать так:

$$y(x) = A y_0(x) + B y_1(x). \quad (19)$$

Однако задачу еще нельзя считать решенной. Дело в том, что в математической физике нас интересуют не любые решения, а только такие, которые удовлетворяют условиям однозначности, непрерывности и конечности. Анализ же рядов (17) и (18) показывает, что последнему требованию они, вообще говоря, не удовлетворяют. И только в том частном случае, когда какой-нибудь из этих рядов «обрывается» на некотором члене и содержит конечное число слагаемых, т. е. представляет собой многочлен, условие ограниченности выражаемой им функции выполняется на всем отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Это может иметь место, если согласно формуле (16) обратится в нуль какой-нибудь коэффициент; тогда и все последующие коэффициенты автоматически станут нулевыми.

Остается заметить, что при $a_l \neq 0$ коэффициент a_{l+2} исчезает только в том случае, если постоянная λ равна

произведению двух последовательных целых чисел l и $l+1$:

$$\lambda = l(l+1). \quad (20)$$

Только при выполнении равенства (20) можно получить конечные решения уравнения Лежандра (12). При четном l следует выбрать частное решение $y_0(x)$, которое в этом случае будет представлять собой многочлен l -й степени. Если же l нечетно, то в многочлен l -й степени обратится ряд, определяющий $y_1(x)$.

Таким образом, удовлетворяющее условию (20) уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \quad (12')$$

имеет ограниченное решение, которое представляет собой многочлен l -й степени. При четном l это решение имеет вид:

$$y_0 = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_lx^l, \quad (18')$$

а при нечетном l оно имеет вид:

$$y_1 = a_1x + a_3x^3 + \dots + a_lx^l. \quad (19')$$

Коэффициенты a_k и в том, и в другом случае определяются через произвольно выбранные a_0 или a_1 по формуле:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k. \quad (16')$$

Многочлены (18') и (19'), у которых соответствующие коэффициенты a_0 или a_1 выбраны таким образом, чтобы в точке $x=1$ значения этих многочленов были равны 1, принято называть *полиномами Лежандра* и обозначать через $P_l(x)$.

Резюмируя, можно сказать, что уравнение Лежандра (12) только при $\lambda = l(l+1)$ имеет ограниченные на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ решения, которые с точностью до постоянного множителя являются полиномами Лежандра $P_l(x)$.

§ 3. Полиномы Лежандра

Познакомимся подробнее со свойствами различных полиномов Лежандра.

Прежде всего найдем полиномы наименьших степеней $l=0, 1, 2, 3$. При $l=0$ мы имеем многочлен нулевой степени, которым является коэффициент a_0 . Но чтобы