произведению двух последовательных целых чисел l и $l+1$:

$$\lambda = l(l+1). \tag{20}$$

Только при выполнении равенства (20) можно получить конечные решения уравнения Лежандра (12). При четном l следует выбрать частное решение $y_0(x)$, которое в этом случае будет представлять собой многочлен l-й степени. Если же l нечетно, то в многочлен l-й степени обратится ряд, определяющий $y_1(x)$.

Таким образом, удовлетворяющее условию (20) уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{12'}$$

имеет ограниченное решение, которое представляет собой многочлен l-й степени. При четном l это решение имеет вид:

$$y_0 = a_0 + a_2x^2 + \ldots + a_lx^l, \tag{18'}$$

а при нечетном l оно имеет вид:

$$y_1 = a_1x + a_3x^3 + \ldots + a_lx^l. \tag{19'}$$

Коэффициенты a_k и в том, и в другом случае определяются через произвольно выбранные a_0 или a_1 по формуле:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k. \tag{16'}$$

Многочлены (18′) и (19′), у которых соответствующие коэффициенты a_0 или a_1 выбраны таким образом, чтобы в точке $x=1$ значения этих многочленов были равны 1, принято называть *полиномами Лежандра* и обозначить через $P_l(x)$.

Резюмируя, можно сказать, что уравнение Лежандра (12) только при $\lambda = l(l+1)$ имеет ограниченные на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ решения, которые с точностью до постоянного множителя являются полиномами Лежандра $P_l(x)$.

§ 3. Полиномы Лежандра

Познакомимся подробнее со свойствами различных полиномов Лежандра.

Прежде всего найдем полиномы наименьших степеней $l=0, 1, 2, 3$. При $l=0$ мы имеем многочлен нулевой степени, которым является коэффициент a_0. Но чтобы

$P_0(1)=1$, нужно принять $a_0=1$. Итак,

$$P_0(x)=1.$$

При $l=1$ получаем многочлен первой степени, он имеет вид a_1x. Чтобы при $x=1$ этот многочлен был равен 1, необходимо принять $a_1=1$. Следовательно,

$$P_1(x)=x.$$

При $l=2$ у многочлена второй степени $a_0+a_2x^2$ коэффициент a_2 согласно (16′) должен быть равен $-3a_0$. Поэтому

$$P_2(x)=a_0-3a_0x^2.$$

Чтобы при этом $P_2(1)=1$, постоянную a_0 нужно выбрать равной $-1/2$, так что

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

При $l=3$ у многочлена третьей степени $a_1x+a_3x^3$ коэффициент a_3 выражается через a_1 по формуле (16′) так:

$$a_3=\frac{1\cdot 2-3\cdot 4}{3\cdot 2}a_1=-\frac{5}{3}a_1.$$

Таким образом,

$$P_3(x)=a_1\left(x-\frac{5}{3}x^3\right).$$

В точке $x=1$

$$P_3(1)=-\frac{2}{3}a_1.$$

Чтобы $P_3=1$, надо принять $a_1=-3/2$. Следовательно,

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

Вычисление полиномов Лежандра более высоких степеней таким методом довольно громоздко. Удобнее для этой цели пользоваться так называемой *формулой Родриго:*

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\cdot\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l. \qquad (21)$$

(Рекомендуем читателю с помощью этой формулы вычислить $P_l(x)$ для всех l от 0 до 5.)

Графики нескольких низших полиномов Лежандра приведены на рисунке 43.

Полиномы Лежандра обладают важным свойством ортогональности, выражающимся аналитически в том, что интеграл от произведения двух различных полиномов равен нулю:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = 0,$$

если $l' \neq l$.

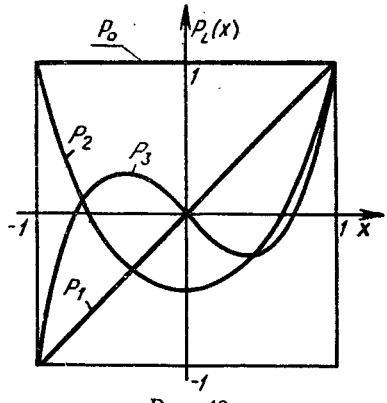

Рис. 43

До сих пор мы говорили о решении простого уравнения Лежандра (12), являющегося частным случаем обобщенного уравнения Лежандра (11). Оказывается, что конечными решениями (11) являются так называемые присоединенные полиномы Лежандра $P_l^{(m)}(x)$, определяемые следующей формулой Родриго:

$$P_l^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \qquad (22)$$

Обратим внимание, что при $m > l$ имеет место тождество $P_l^{(m)}(x) \equiv 0$. Поэтому каждому значению l соответствует $l + 1$ присоединенных полиномов Лежандра

$$P_l^{(m)}(x),$$
$$\text{где } m = 0, 1, 2, \ldots, l.$$

В качестве примера найдем все присоединенные полиномы, соответствующие $l = 2$.

Параметр m в этом случае может принимать значения 0, 1, 2, т. е. возможны три полинома: $P_2^{(0)}(x) = P_2(x)$, $P_2^{(1)}$ и $P_2^{(2)}(x)$. Найдем каждый из них.

Из предыдущего мы знаем, что $P_2^{(0)} = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Далее, по формуле (22) находим:

$$P_2^{(1)}(x) = (1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right] = 3x\sqrt{1 - x^2},$$

$$P_2^{(2)}(x) = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right] = 3(1 - x^2).$$