§ 4. Сферические и шаровые функции

Вернемся к задаче, сформулированной в § 1. Поскольку уравнение (11) получилось из (9′) заменой независимой переменной $\cos\theta = x$, то ясно, что уравнение (9′) имеет конечные решения только в том случае, когда $\lambda = l(l+1)$. Это уравнение принимает при этом форму:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]V = 0. \qquad (9'')$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$V(\theta) = P_l^{(m)}(\cos\theta). \qquad (23)$$

Таким образом, чтобы найти функцию $U(r, \theta, \varphi) = R(r)\cdot V(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$, осталось еще найти $R(r)$, являющееся решением «радиального» уравнения (5). Раскроем в этом уравнении скобки и заменим λ произведением $l(l+1)$:

$$r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0. \qquad (5')$$

Это — дифференциальное уравнение типа Эйлера. Поэтому будем искать его решение в виде:

$$R = r^s. \qquad (24)$$

Подставив в (5′) R и его производные $R' = sr^{s-1}$ и $R'' = s(s-1)r^{s-2}$, получим:

$$s(s-1)r^s + 2sr^s - l(l+1)r^s = 0.$$

Сокращая на r^s и произведя сложение общих членов, приходим к соотношению:

$$s(s+1) = l(l+1),$$

откуда

$$s_1 = l, \quad s_2 = -(l+1).$$

Следовательно, общее решение уравнения (5′) имеет вид:

$$R = C_1r^l + C_2r^{-(l+1)}.$$

Так как нас интересуют только конечные решения для всех внутренних точек шара (в том числе и центра, где $r = 0$), то необходимо положить $C_2 = 0$. Тогда

$$R = C_1r^l. \qquad (25)$$

Следовательно, в соответствии с равенством (7), конечными решениями уравнения (6) являются сферические функции:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = V(\theta)\Phi(\varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}. \qquad (26)$$

Ясно, что для каждого l имеется $2l+1$ сферических функций, соответствующих $m=0, 1, \ldots, l$.

Произведение радиальной функции $R=r^l$ на любую сферическую функцию $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$ согласно (2) является частным ограниченным решением уравнения Лапласа:

$$U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)=r^l Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)=r^l P_l^{(m)}(\cos\theta)\cdot e^{\pm im\varphi}. \quad (27)$$

Функции $U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)$ называют шаровыми. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(r, \theta, \varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos\theta)(Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi}). \quad (28)$$

В следующем параграфе рассмотрен пример решения уравнения (1) для конкретной физической задачи.

§ 5. Стационарное распределение температуры в шаре

Пусть на поверхности шара радиуса a температура поддерживается постоянной, равной $f(\theta)$. Найдем установившееся распределение температуры $T(r, \theta, \varphi)$ внутри шара.

Задача сводится к решению уравнения Лапласа:

$$\Delta T=0 \quad (29)$$

при граничном условии $T|_{r=a}=f(\theta)$.

Приступая к его решению, прежде всего учтем, что вследствие независимости температуры на поверхности от долготного угла φ не может зависеть от этой координаты и температура внутренних точек шара, т. е. $T=T(r, \theta)$. Поэтому уравнение Лапласа (1) упрощается и принимает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0. \quad (30)$$

Отсюда следует, что параметр m равен нулю и $T=R(r)V(\theta)$, причем $V(\theta)$ удовлетворяет простому уравнению Лежандра (12).

Следовательно, шаровые функции (27) принимают вид:

$$T_l(r, \theta)=r^l P_l(\cos\theta), \quad (31)$$

и общее решение (28) запишется так:

$$T(r, \theta)=\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta). \quad (32)$$