Ясно, что для каждого l имеется $2l+1$ сферических функций, соответствующих $m=0, 1, \ldots, l$.

Произведение радиальной функции $R=r^l$ на любую сферическую функцию $Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$ согласно (2) является частным ограниченным решением уравнения Лапласа:

$$U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)=r^l Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)=r^l P_l^{(m)}(\cos\theta)\cdot e^{\pm im\varphi}. \quad (27)$$

Функции $U_l^{(m)}(r, \theta, \varphi)$ называют шаровыми. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$U(r, \theta, \varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos\theta)(Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi}). \quad (28)$$

В следующем параграфе рассмотрен пример решения уравнения (1) для конкретной физической задачи.

§ 5. Стационарное распределение температуры в шаре

Пусть на поверхности шара радиуса a температура поддерживается постоянной, равной $f(\theta)$. Найдем установившееся распределение температуры $T(r, \theta, \varphi)$ внутри шара.

Задача сводится к решению уравнения Лапласа:

$$\Delta T=0 \quad (29)$$

при граничном условии $T|_{r=a}=f(\theta)$.

Приступая к его решению, прежде всего учтем, что вследствие независимости температуры на поверхности от долготного угла φ не может зависеть от этой координаты и температура внутренних точек шара, т. е. $T=T(r, \theta)$. Поэтому уравнение Лапласа (1) упрощается и принимает вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0. \quad (30)$$

Отсюда следует, что параметр m равен нулю и $T=R(r)V(\theta)$, причем $V(\theta)$ удовлетворяет простому уравнению Лежандра (12).

Следовательно, шаровые функции (27) принимают вид:

$$T_l(r, \theta)=r^l P_l(\cos\theta), \quad (31)$$

и общее решение (28) запишется так:

$$T(r, \theta)=\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta). \quad (32)$$

Дело свелось, следовательно, к такому выбору коэффициентов этого ряда, чтобы при $r \to a$ последний член сходился к $f(\theta)$:

$$T|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos\theta) = f(\theta). \tag{33}$$

Ранее было отмечено, что полиномы Лежандра образуют ортогональное семейство функций и что поэтому любую функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по этому семейству:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \tag{34}$$

где коэффициенты Фурье—Лежандра определяются по формуле:

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\, dx. \tag{35}$$

Сопоставляя (33) в (34), заключаем, что

$$C_l = \frac{f_l}{a^l}, \tag{36}$$

где

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{0}^{\pi} f(\theta) P_l(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta. \tag{35'}$$

Подставляя (36) в (33), получаем окончательное решение задачи в виде функционального ряда:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta). \tag{37}$$

Глава V.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

До сих пор мы решали дифференциальные уравнения в частных производных методом разделения переменных. Другим распространенным в математической физике методом решения таких уравнений является метод функций Грина. Он состоит в том, что сначала находят некоторое специальное решение задачи того же типа, а затем через него в квадратурах выражают интеграл исходной задачи.

Ниже мы подробнее ознакомимся с сущностью этого метода на конкретных примерах.