

Дело свелось, следовательно, к такому выбору коэффициентов этого ряда, чтобы при $r \rightarrow a$ последний член сходился к $f(\theta)$:

$$T|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos \theta) = f(\theta). \quad (33)$$

Ранее было отмечено, что полиномы Лежандра образуют ортогональное семейство функций и что поэтому любую функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по этому семейству:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x), \quad (34)$$

где коэффициенты Фурье—Лежандра определяются по формуле:

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx. \quad (35)$$

Сопоставляя (33) в (34), заключаем, что

$$C_l = \frac{f_l}{a^l}, \quad (36)$$

где

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \cdot \sin \theta d\theta. \quad (35')$$

Подставляя (36) в (33), получаем окончательное решение задачи в виде функционального ряда:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \left(\frac{r}{a} \right)^l P_l(\cos \theta). \quad (37)$$

Глава V.

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА

До сих пор мы решали дифференциальные уравнения в частных производных методом разделения переменных. Другим распространенным в математической физике методом решения таких уравнений является метод функций Грина. Он состоит в том, что сначала находят некоторое специальное решение задачи того же типа, а затем через него в квадратурах выражают интеграл исходной задачи.

Ниже мы подробнее ознакомимся с сущностью этого метода на конкретных примерах.

§ 1. Метод Грина решения краевых задач

Пусть нужно найти функцию $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую в области V уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяющую на границе этой области условию:

$$\varphi|_S = f(x', y', z'). \quad (2)$$

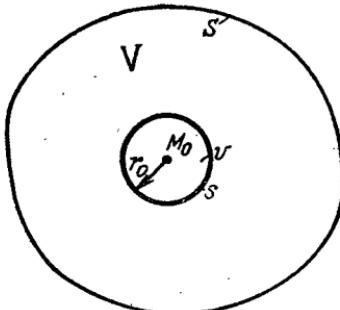


Рис. 44

Возьмем внутри области V некоторую точку M_0 и окружим ее маленькой сферой s объема v и радиуса r_0 (рис. 44). Применим теперь формулу Грина (51, ч. II) к области $V' = V - v$, ограниченной двумя поверхностями S и s :

$$\begin{aligned} \int_{V'} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV &= \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \oint_s \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку эта формула справедлива для произвольных функций φ и ψ , то выберем в качестве φ искомую функцию $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (1) и (2), а под ψ будем понимать так называемую *функцию Грина* G , которая определяется равенством:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r} + H(x, y, z), \quad (4)$$

где r — расстояние произвольной точки от M_0 . Функция $H(x, y, z)$ удовлетворяет в области V уравнению Лапласа:

$$\Delta H = 0 \quad (5)$$

и принимает на поверхности $S = S(x', y', z')$ значения:

$$H(x', y', z') \equiv H(\vec{r}') = -\frac{1}{r'}, \quad (6)$$

где r' — расстояние точек поверхности S от точки M_0 .

Так как $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, отличных от $M_0 (r=0)$, то согласно (4) и (5), функция $\psi = G(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta\psi = 0$ в области V' , причем на поверхности S в соответствии с (4) и (6):

$$\psi|_S = G(x', y', z') = 0. \quad (7)$$

Поэтому соотношение (3) принимает вид:

$$-\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Поскольку согласно (2) $\varphi|_S = f(x', y', z')$, то это равенство можно записать так:

$$\oint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (8)$$

Вычислим теперь левую часть (8), которую для краткости обозначим через I :

$$I = \oint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (9)$$

Подставляя сюда значение функции Грина G из (4) и вспоминая, что радиус малой сферы s есть r_0 , разобьем I на два интеграла I_1 и I_2 :

$$I = I_1 + I_2 = \oint_S \left\{ \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} + H \right) \right\} ds, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \oint_S \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds, \\ I_2 &= \oint_S \left(H \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial H}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

Применим теперь ко второму интегралу I_2 формулу Грина:

$$I_2 = \int_v (H \Delta \varphi - \varphi \cdot \Delta H) dv.$$

Но согласно (1) и (5) функции φ и H удовлетворяют уравнению Лапласа во всей области V , в том числе и v . Поэтому $I_2 = 0$ и в (10) остается одно слагаемое:

$$I = I_1 = \oint_S \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right\} ds. \quad (11)$$

Так как r_0 есть радиус сферы s , т. е. является величиной постоянной, то

$$I = \frac{1}{r_0} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (12)$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое:

$$\frac{1}{r_0} \oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds. \quad (13)$$

По теореме о среднем

$$\oint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 4\pi r_0^2 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle,$$

где $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle$ — значение $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ в некоторой точке сферы s . Поэтому выражение (13) обращается в малую величину

$$4\pi r_0 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle,$$

которая при стягивании сферы s к точке M_0 стремится к нулю пропорционально r_0 :

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} 4\pi r_0 \langle \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle = 0.$$

Теперь обратимся ко второму слагаемому в (12):

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds. \quad (14)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{r_0^2},$$

то применение теоремы о среднем к интегралу (14) дает:

$$\oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = \frac{1}{r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2 \langle \varphi \rangle = 4\pi \langle \varphi \rangle,$$

где $\langle \varphi \rangle$ — значение функции φ в некоторой точке сферы s . В пределе при $r_0 \rightarrow 0$ величина $\langle \varphi \rangle$ стремится к значению функции φ в точке M_0 . Следовательно,

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \oint_s \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) ds = 4\pi \varphi(M_0). \quad (15)$$

Вернемся теперь к исходному равенству (8). Поскольку интеграл в правой части распространяется по поверхности S , он не может зависеть от радиуса малой сферы s . Следовательно, и левая часть не зависит от r_0 . Подставляя (15) в равенство (8), получаем:

$$4\pi \varphi(M_0) = - \oint_s f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

или

$$\Phi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (16)$$

Так как M_0 — произвольная точка области V , то эта формула представляет собой решение рассматриваемой задачи, если известна функция Грина G . Иными словами, задача свелась к определению функции $H(x, y, z)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6):

$$\Delta H = 0 \text{ и } H|_S = -\frac{1}{r_0}.$$

Ясно, что, вообще говоря, последние не намного проще исходных условий (1) и (2). Однако для некоторых типов областей V и ограничивающих их поверхностей S функция Грина может быть легко построена и в этих случаях искомое решение сводится к вычислению интеграла в правой части (16).

Ниже приводятся два примера, когда удается определить функцию Грина для задачи Дирихле.

§ 2. Функция Грина для шара

Пусть область V является шаром радиуса a , а точка M_0 лежит внутри шара на оси X , имея координаты $(x_0, 0, 0)$. Построим точку $M_0^*(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0)$, которую назовем сопряженной относительно ограничивающей шар сферы (рис. 45). Нетрудно убедиться, что для каждой точки N , лежащей на сфере, отношение $|NM_0^*|/|NM_0|$ есть величина постоянная. Действительно, треугольники OM_0N и ONM_0^*

подобны (это следует из того, что $\frac{|OM_0|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM_0^*|} = \frac{x_0}{a}$).

Поэтому отношение длин и оставшихся третьих сторон $|NM_0|$ к $|NM_0^*|$ также равно x_0/a , т. е. не зависит от положения N на сфере.

Теперь можно утверждать, что для произвольной точки M внутри шара функция

$$G(M) = \frac{1}{r} - \frac{a}{x_0} \frac{1}{r^*} \quad (17)$$

(где $r = |MM_0|$, $r^* = |MM_0^*|$) является функцией Грина.