или

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_S f(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \qquad (16)$$

Так как M_0 — произвольная точка области V, то эта формула представляет собой решение рассматриваемой задачи, если известна функция Грина G. Иными словами, задача свелась к определению функции $H(x, y, z)$, удовлетворяющей условиям (5) и (6):

$$\Delta H = 0 \text{ и } H|_S = -\frac{1}{r_0}.$$

Ясно, что, вообще говоря, последние не намного проще исходных условий (1) и (2). Однако для некоторых типов областей V и ограничивающих их поверхностей S функция Грина может быть легко построена и в этих случаях искомое решение сводится к вычислению интеграла в правой части (16).

Ниже приводятся два примера, когда удается определить функцию Грина для задачи Дирихле.

§ 2. Функция Грина для шара

Пусть область V является шаром радиуса a, а точка M_0 лежит внутри шара на оси X, имея координаты $(x_0, 0, 0)$. Построим точку $M_0^*\left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right)$, которую назовем сопряженной относительно ограничивающей шар сферы (рис. 45). Нетрудно убедиться, что для каждой точки N, лежащей на сфере, отношение $|NM_0^*|/|NM_0|$ есть величина постоянная. Действительно, треугольники OM_0N и ONM_0^* подобны $\left(\text{это следует из того, что } \frac{|OM_0|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM_0^*|} = \frac{x_0}{a}\right)$. Поэтому отношение длин и оставшихся третьих сторон $|NM_0|$ к $|NM_0^*|$ также равно x_0/a, т. е. не зависит от положения N на сфере.

Теперь можно утверждать, что для произвольной точки M внутри шара функция

$$G(M) = \frac{1}{r} - \frac{a}{x_0}\frac{1}{r^*} \qquad (17)$$

(где $r = |MM_0|$, $r^* = |MM_0^*|$) является функцией Грина.

Чтобы проверить это, достаточно показать, что $H(M) = -\frac{a}{x_0}\frac{1}{r^*}$ удовлетворяет внутри шара V уравнению $\Delta H = 0$, а на поверхности шара $H|_S = -\frac{1}{r}$.

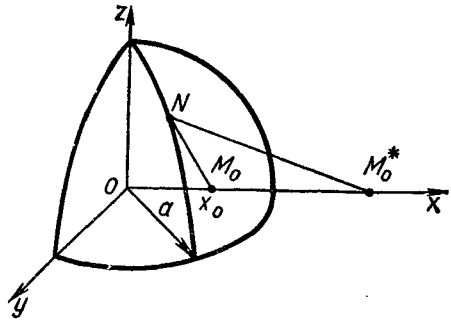

Рис. 45

Так как $r^* = |MM_0^*|$ для любой точки внутри шара есть величина, отличная от нуля, то во всей области V

$$\Delta\left(\frac{1}{r^*}\right) = 0.$$

Что касается второго условия, то ясно, что

$$H|_S = H(N) = -\frac{a}{x_0}\frac{1}{|NM_0^*|}.$$

Но

$$\frac{|NM_0^*|}{|NM_0|} = \frac{a}{x_0}.$$

или

$$\frac{1}{|NM_0^*|} = \frac{x_0}{a}\frac{1}{|NM_0|} = \frac{x_0}{a}\frac{1}{r}.$$

Следовательно,

$$H|_S = -\frac{1}{r}.$$

Таким образом, функция (17) является функцией Грина для рассматриваемой задачи.

Чтобы теперь мы могли воспользоваться общей формулой (16), вычислим еще производную $\frac{\partial G}{\partial n}$ на сфере:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial R}\right|_{R=a} = \frac{\partial}{\partial R}\left[\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{a}{x_0}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right]_{R=a},$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор любой точки M шара, отсчитываемый от центра. На рисунке 45 ясно, что $r^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\gamma$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial R}(R^2 + x_0^2 - 2Rx_0\cos\gamma)^{-1/2} = -\frac{R - x_0\cos\gamma}{r^3}.$$

Полагая, что $R=a$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{R=a}=-\frac{a-x_0\cos\gamma}{(a^2+x_0^2-2ax_0\cos\gamma)^{3/2}}. \qquad (18)$$

Если вместо x_0 подставить a^2/x_0, мы найдем значение производной $\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r^*}\right)_{R=a}$:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r^*}\right)_{R=a}=-\frac{ax_0-a^2\cos\gamma}{x_0\left(a^2+\frac{a^4}{x_0^2}-2\frac{a^3}{x_0}\cos\gamma\right)^{3/2}}.$$

После упрощений, приходим к выражению:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{r^*}\right)_{R=a}=-\frac{x_0^2}{a^2}\frac{x_0-a\cos\gamma}{(a^2+x_0^2-2ax_0\cos\gamma)^{3/2}}. \qquad (19)$$

Объединяя (18) и (19), определяем входящую в (16) производную:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S=-\frac{a^2-x_0^2}{a}(a^2+x_0^2-2ax_0\cos\gamma)^{-3/2}. \qquad (20)$$

Подставим теперь это выражение в (16), получаем решение задачи Дирихле для шара в виде квадратуры (искомую функцию вместо φ обозначим через U):

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi a}\oint\frac{a^2-x_0^2}{(a^2+x_0^2-2ax_0\cos\gamma)^{3/2}}f(R')\,dS. \qquad (21)$$

В общем случае, когда точка M_0 обладает произвольными сферическими координатами r_0, θ_0, φ_0, это решение удобнее представить в сферической системе координат ($dS=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$):

$$U(M_0)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2-r_0^2}{(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma)^{3/2}}f(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \qquad (22)$$

где нетрудно показать,

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \qquad (23)$$

Интеграл (22) называется интегралом Пуассона для шара.

В том случае, когда задача Дирихле является плоской и область определения функции U представляет собой круг радиуса a, интеграл Пуассона принимает более простой вид:

$$U(M_0)=U(r_0\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta_0-\varphi)}f(\varphi)\,d\varphi. \qquad (24)$$

Интересно заметить, что ранее (гл. II, § 3) мы решили аналогичную задачу методом Фурье и получили решение для круга в виде ряда. Можно легко показать, что эти два решения эквивалентны.

§ 3. Функция Грина для полупространства

Пусть нужно найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в полупространстве $z > 0$ уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ и принимающую на плоскости XOY $(z = 0)$ заданное значение:

$$U|_{z=0} = f(x, y).$$

Как и в случае конечной области V, представляем функцию Грина для произвольной точки верхнего полупространства $(z > 0)$ в виде двух слагаемых:

$$G(M) = \frac{1}{r} + H(M), \tag{25}$$

где $r = |\overrightarrow{MM_0}|$ есть расстояние произвольной точки M от некоторой фиксированной $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Что касается функции $H(M)$, то она по-прежнему удовлетворяет двум условиям $\Delta H = 0$ и $H|_{z=0} = -\frac{1}{r'}$, здесь $r' = \overrightarrow{NM_0}$ — расстояние от M_0 до любой точки $N(x', y')$ на плоскости $z = 0$. Поскольку $G(N) = 0$, то решением задачи является функция:

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(x, y)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS. \tag{26}$$

Ясно, что

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

Поэтому

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{+\infty}^{+\infty}\int f(x, y)\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=0} dx\,dy. \tag{27}$$

В качестве функции $H(M) = H(x, y, z)$ выберем величину

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{r^*}, \tag{28}$$

где $r^* = |\overrightarrow{MM_0^*}|$ есть расстояние от текущей точки M до точки $M_0^*(x_0, y_0, z_0)$, сопряженной точке M_0 (рис. 46).