Интересно заметить, что ранее (гл. II, § 3) мы решили аналогичную задачу методом Фурье и получили решение для круга в виде ряда. Можно легко показать, что эти два решения эквивалентны.

§ 3. Функция Грина для полупространства

Пусть нужно найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в полупространстве $z > 0$ уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ и принимающую на плоскости XOY $(z = 0)$ заданное значение:

$$U|_{z=0} = f(x, y).$$

Как и в случае конечной области V, представляем функцию Грина для произвольной точки верхнего полупространства $(z > 0)$ в виде двух слагаемых:

$$G(M) = \frac{1}{r} + H(M), \tag{25}$$

где $r = |\overrightarrow{MM_0}|$ есть расстояние произвольной точки M от некоторой фиксированной $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Что касается функции $H(M)$, то она по-прежнему удовлетворяет двум условиям $\Delta H = 0$ и $H|_{z=0} = -\frac{1}{r'}$, здесь $r' = \overrightarrow{NM_0}$ — расстояние от M_0 до любой точки $N(x', y')$ на плоскости $z = 0$. Поскольку $G(N) = 0$, то решением задачи является функция:

$$U(M_0) = U(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_S f(x, y)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS. \tag{26}$$

Ясно, что

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

Поэтому

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{+\infty}^{+\infty}\int f(x, y)\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=0} dx\,dy. \tag{27}$$

В качестве функции $H(M) = H(x, y, z)$ выберем величину

$$H(x, y, z) = -\frac{1}{r^*}, \tag{28}$$

где $r^* = |\overrightarrow{MM_0^*}|$ есть расстояние от текущей точки M до точки $M_0^*(x_0, y_0, z_0)$, сопряженной точке M_0 (рис. 46).

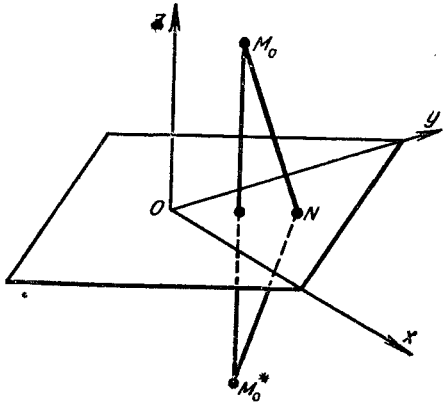

Рис. 46

Несложно убедиться, что функция (28) удовлетворяет и уравнению Лапласа $\Delta H = 0$ и граничному условию

$$H|_S = H(N) = H(x, y, 0) = -\frac{1}{r'^*} = -\frac{1}{r'},$$

поскольку $r'^* = |M_0^* N| = |M_0 N| = r'$. Подставляя (28) в (26) и записывая полученное выражение в развернутом виде, находим для функции Грина следующее выражение:

$$G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}. \tag{29}$$

Дифференцируя эту функцию по z, получаем:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{2z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (27), приходим к окончательному выражению:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x, y)\,[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{-3/2}\,dx\,dy, \tag{31}$$

являющемуся решением рассматриваемой задачи.