Часть третья

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава I.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В физике, как и других науках, часто приходится рассматривать различные совокупности объектов, объединенных некоторым общим признаком. С точки зрения математики такая совокупность образует *множество*, а каждый ее объект называют *элементом множества*. В зависимости от числа содержащихся в них элементов множества бывают конечные и бесконечные.

Множество считается заданным, если о любом предмете можно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Обычно множества определяются либо заданием всех их элементов, либо путем указания характеристического свойства, коим обладают только элементы данного множества. Так, точки окружности образуют бесконечное множество, элементы которого (точки) объединены тем свойством, что все они равноудалены от центра. Линейная алгебра рассматривает множества, в которых возможны определенные алгебраические операции.

Если указан закон, по которому каждой паре элементов a и b, взятых в определенном порядке из множества M, однозначным образом ставится в соответствие третий элемент c, также принадлежащий этому множеству, то говорят, что в множестве M определена алгебраическая операция, которую называют *сложением* (или *умножением*):

$$a+b=c \quad (\text{или } ab=c).$$

Обратим внимание на то, что алгебраические операции обладают следующими свойствами:

1) операцию можно осуществить над любой парой элементов данного множества;

2) операция определяется однозначно, т. е. для каждой пары элементов она выполняется единственным способом и результат оказывается также единственным;

3) получающийся в итоге операции над двумя элементами множества новый элемент обязательно принадлежит к тому же множеству.

Если результат алгебраической операции не зависит от порядка участвующих в ней элементов, т. е. $a+b=b+a$ (или $ab=ba$), то операция называется *коммутативной* (перестановочной); в противном случае алгебраическая операция *некоммутативна*. Операции еще подразделяют на *ассоциативные* (сочетательные), если $(a+b)+c=a+(b+c)$, и *неассоциативные*, если результат операции над тремя элементами зависит от последовательности ее выполнения между парами элементов.

Среди множеств, в которых возможны алгебраические операции, современная алгебра изучает прежде всего следующие:

Группы — множества с одной ассоциативной операцией (не обязательно коммутативной).

Кольца — множества с двумя алгебраическими ассоциативными операциями (сложением и умножением), связанные дистрибутивным (распределительным) свойством:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Поля — коммутативные кольца, в котором есть нулевой и единичный элементы 0 и 1, причем для каждого ненулевого элемента a существует обратный элемент a^{-1}, т. е. $aa^{-1}=1$.

Легко убедиться в том, что каждое из множеств чисел — рациональных, действительных, комплексных — образует поле.

По определению алгебраическая операция есть действие над элементами одного и того же множества. Однако для решения многих практических задач пришлось обобщить понятие операции, применяя ее к элементам из разных множеств.

Так, пусть дано множество векторов, характеризующих электрическое поле, созданное точечным зарядом q, т. е. векторное поле $\vec{E}(\vec{r})$. Если величину заряда изменить в α раз (α — любое действительное число), то векторы напряженности $\vec{E}$ в каждой точке также изменят свою длину в α раз.

Следовательно, возникает необходимость ввести операцию умножения элементов векторного множества S на элементы числового поля P. В современной алгебре под понятием *вектор* $\vec{a}$ понимают абстрактную математическую величину, характеризующуюся в n-мерном пространстве n скалярными числами — координатами $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,

лишь бы для таких величин была указана операция сложения.

Таким образом, современная алгебра наряду с группами, кольцами и полями изучает также *абстрактные векторные множества*, для которых определена еще операция умножения любого его элемента на произвольное число из некоторого поля P.

В частности, предметом *линейной алгебры* являются такие векторные множества, для которых операции сложения и умножения на число удовлетворяют ряду рассматриваемых ниже условий. В этом случае множество векторов называют *линейным* (или *аффинным*) *векторным пространством*.

Основная задача линейной алгебры — это изучение линейных пространств и аффинных преобразований таких пространств.

§ 1. Линейное векторное пространство

Множество векторов R образует линейное (аффинное) пространство, если для всех элементов из R заданы операции сложения и умножения на числа[1], причем обе эти операции удовлетворяют следующим условиям:

а) ***коммутативности*** —

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b}&=\vec{b}+\vec{a} \\ \lambda\vec{a}&=\vec{a}\lambda \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(I)}$$

б) ***ассоциативности*** —

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}&=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \\ \lambda(\mu\vec{a})&=(\lambda\mu)\vec{a} \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(II)}$$

в) ***дистрибутивности*** —

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\vec{a}+\vec{b})&=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \\ (\lambda+\mu)\vec{a}&=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(III)}$$

г) **существует единственный нуль-вектор $\vec{0}$, такой, что для любого вектора $\vec{a}$ имеет место равенство**

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}; \qquad \text{(IV)}$$

---

[1] Векторы $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\lambda\vec{a}$ принадлежат векторному множеству, если только $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — элементы этого множества.

д) для всякого ненулевого вектора $\vec{a}$ существует единственный противоположный вектор $-\vec{a}$, который в сумме с $\vec{a}$ дает нуль:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}; \qquad \text{(V)}$$

е) при умножении произвольного вектора $\vec{a}$ на число 1 вектор не меняется:

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}. \qquad \text{(VI)}$$

Такое громоздкое определение вызывает обычно у начинающего некоторое недоумение, возникают вопросы: почему рассмотренное множество называют *линейным пространством*? Почему каждый вектор этого множества обязательно должен обладать свойствами (I)—(VI)? и т. п.

Чтобы ответить на эти вопросы и пояснить геометрическую сущность указанного определения, познакомимся немного с методологией современной геометрии.

Геометрия как математическая наука о пространственных отношениях и формах тел пользуется двумя основными методами: синтетическим (или собственно геометрическим) и аналитическим. Первый был развит еще геометрами древности и прежде всего Евклидом. В этом методе все выводы и рассуждения строятся на чисто геометрической, наглядной основе, с привлечением пространственного опыта; по существу синтетический метод состоит в оперировании самими геометрическими образами и понятиями.

Типичными примерами применения синтетического метода в элементарной математике являются задачи на построение и доказательство теорем о равенстве треугольников путем наложения.

Аналитический метод берет начало с работ известного французского математика Декарта, введшего в первой половине XVII века в геометрию систему координат и сопоставившего каждой точке пространства тройку чисел x, y, z. Это позволило сначала свести простые геометрические понятия и выводы к числам, уравнениям, вычислениям (*аналитическая геометрия*), а затем решать и более тонкие геометрические задачи с помощью аппарата математического анализа (*дифференциальная геометрия*). Этот метод по существу слил в одно целое геометрию, алгебру и анализ. Примерами применения этого метода являются тригонометрические и алгебраические способы решения различных элементарных геометрических задач.

В современных геометрических теориях аналитический метод играет важнейшую роль, он применяется не только для доказательства различных теорем, но и для определения исходных, основных геометрических понятий.

Дальнейшим развитием этого метода в геометрии явились векторное и тензорное исчисления, позволившие аналитически характеризовать геометрические объекты и соотношения инвариантным (не зависящим от выбора системы координат) способом.

Действительно, основному геометрическому объекту—точке сопоставляется радиус-вектор, так что произвольной области пространства, представляющей собой непрерывное множество точек,

приводится в соответствие векторное множество. Умея оперировать с векторами, мы, очевидно, можем любую геометрическую задачу решить методами векторной алгебры.

Векторное исчисление оказалось наиболее удобным аналитическим аппаратом для исследования геометрии того или иного пространства. Но для того чтобы с помощью векторов можно было изучать геометрические свойства данного пространства, нужно сформулировать основные определения и операции над векторами как направленными отрезками, соединяющими две точки, т. е. построить векторно-алгебраическую аксиоматику, из которой все утверждения и факты указанной геометрии вытекали бы как следствия.

Ясно, что каждой геометрии соответствует своя совокупность аксиом. При пользовании синтетическим методом это — геометрические аксиомы. Когда же исследование пространственных соотношений производится с помощью векторного анализа, используются эквивалентные геометрическим алгебраические аксиомы. Так, определения понятия вектора и правил действия над векторами будут различными для геометрий на плоскости и сфере, ибо геометрические аксиомы этих геометрий различны (например, кратчайшим расстоянием на сфере является не прямая, а дуга большого круга).

Легко видеть, что условия (I)—(VI), которым должны удовлетворять векторы двумерного линейного пространства, выполняются для обычной плоскости. Точно так же удовлетворяют этим условиям векторы реального трехмерного пространства, поскольку мы считаем его евклидовым или плоским (лишенным кривизны). Заметим, что великий Лобачевский впервые понял, что вопрос об евклидовости нашего пространства не является столь простым, как считалось ранее, что ответить на него может только опыт; иными словами, решить задачу о кривизне реального пространства должны не математики, а физики. В дальнейшем эту замечательную мысль развил немецкий математик Риман, который показал, что плоское, евклидово пространство является простейшим частным случаем пространств различной кривизны. Соответственно, евклидова геометрия представляет собой предельный вид более общей римановой геометрии.

Согласно общей теории относительности четырехмерное пространство-время не является плоским (евклидовым),

его кривизна переменна и определяется наличием гравитирующих масс вблизи рассматриваемой точки.

Ясно, что линейное пространство — это обобщение геометрического понятия плоского пространства, в частности плоскости (когда размерность пространства равна 2).

Отсюда следует, что линейная алгебра — это аналитический аппарат изучения абстрактной геометрии n-мерных плоских пространств.

Но и геометрия простейшего плоского пространства содержит огромное множество геометрических свойств, которые желательно разбить на отдельные классы.

«Первоначально геометрия вообще не расчленялась. Она изучала главным образом метрические — связанные с измерением размеров фигур — свойства пространства. Лишь попутно рассматривались обстоятельства, связанные не с измерением, а с качественным характером взаимного расположения фигур, причем уже давно замечали, что часть таких свойств отличается своеобразной устойчивостью, сохраняясь при довольно существенных искажениях формы и изменениях положения фигур» (А. Д. Александров).

Немецкий математик Клейн сформулировал общий принцип классификации геометрических свойств: рассматривая различные группы преобразований пространства, объединяют в один класс те геометрические свойства фигур, которые сохраняются при тех или иных преобразованиях. Иными словами, пространственные свойства как бы расслаиваются по их устойчивости.

Представим себе, что на квадратной плоской резиновой пленке нарисован круг с двумя взаимно перпендикулярными диаметрами. Если мы равномерно растянем пленку вдоль одной стороны квадрата, то круг превратится в эллипс и углы между диаметрами уже не будут прямыми (рис. 47). Таким образом, мы видим, что такая равномерная линейная деформация существенно изменила ряд геометрических свойств пространства. Однако некоторые свойства при этом сохранились. Так, не нарушилась прямолинейность диаметров, точка пересечения диаметров делит их пополам (как в круге) и т. д.

Геометрические свойства, которые сохраняются при равномерном растяжении или сжатии пространства в трех взаимно перпендикулярных направлениях (такие преобразования называются *аффинными*), образуют так называемую *аффинную геометрию*. К аффинным свойствам отно-

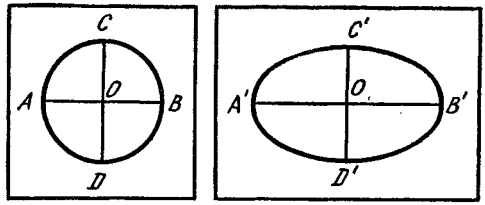

Рис. 47

сятся прямолинейность линий, параллельность прямых, пересечение медиан треугольника в одной точке и др.

Напротив, метрические свойства — длина отрезков, площадь фигур, углы между прямыми и т. п. — сохраняются только при ортогональных преобразованиях, сводящихся к простому повороту (или движению) пространства как целое. Геометрические свойства, остающиеся неизменными при ортогональных преобразованиях образуют *евклидову геометрию*.

Если резиновую пленку закрепить на жестком каркасе, то единственным возможным преобразованием пространства будет его вращение (или движение). При этом неизменными будут как аффинные, так и метрические свойства, которые в совокупности составляют евклидовы свойства пространства. Аналогично свойства, сохраняющиеся при проективных или конформных (сохраняющих углы) преобразованиях, образуют соответственно *проективную и конформную геометрии*.

Если в обычной евклидовой геометрии мы отвлекаемся от реальных свойств тел, кроме геометрических, то при выделении из нее классов как бы совершается дальнейшее абстрагирование от всех других геометрических свойств, кроме тех, которые рассматриваются в данном классе.

Так, изучая аффинные свойства, можно мыслить себе некоторое «воображаемое» пространство, в котором все фигуры не обладают никакими другими геометрическими свойствами, кроме аффинных. Ясно, что аксиоматика геометрии такого абстрактного пространства будет более проста (содержит меньшее число аксиом), чем аксиоматика евклидовой геометрии. Следствия из этой аксиоматики характеризуют аффинные свойства фигур в обычном пространстве.

Из изложенного понятно, что аффинные свойства являются более глубокими, чем метрические. Еще более

глубокими геометрическими свойствами являются *топологические*, сохраняющиеся при самых различных непрерывных (топологических) преобразованиях пространства. Так, при любой непрерывной деформации (без разрывов) резиновой пленки окружность может принять произвольную форму, но будет оставаться замкнутой линией. Изучением таких свойств занимается *топология*, а абстрактное пространство, в котором фигуры обладают только топологическими свойствами, называют *топологическим пространством*.

Вернемся теперь к определению понятия линейного пространства. Легко проверить, что условия (I—VI) описывают не метрические свойства плоского пространства, а только его аффинные свойства. Поэтому можно утверждать, что *линейное пространство—это абстрактное аффинное пространство любого конечного числа измерений.*

§ 2. Размерность линейного пространства

Как известно, пространство как форма существования материи, т. е. наше реальное пространство, имеет три измерения—длину, ширину и высоту. Тем не менее в теоретической физике широко используют как некую математическую абстракцию пространство большего числа измерений. Поэтому изучение линейных пространств любого числа измерений имеет важное значение для математической физики. Чтобы выяснить, как определяется *размерность* пространства, введем понятие *линейной независимости векторов*.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ возможно только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Иными словами, ни один из векторов $\vec{a}_i$ нельзя представить в виде линейной комбинации $(n-1)$ остальных векторов. Если же равенство $\sum_k^n \alpha_k\vec{a}_k=0$ может быть удовлетворено хотя бы при одном ненулевом α_i, то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ являются линейно зависимыми. В этом случае всегда можно один из векторов представить в виде линейной комбинации остальных:

$$\vec{a}_i=\beta_1\vec{a}_1+\ldots\beta_{i-1}\vec{a}_{i-1}+\beta_{i+1}\vec{a}_{i+1}+\ldots+\beta_n a_n.$$