

глубокими геометрическими свойствами являются *топологические*, сохраняющиеся при самых различных непрерывных (топологических) преобразованиях пространства. Так, при любой непрерывной деформации (без разрывов) резиновой пленки окружность может принять произвольную форму, но будет оставаться замкнутой линией. Изучением таких свойств занимается *топология*, а абстрактное пространство, в котором фигуры обладают только топологическими свойствами, называют *топологическим пространством*.

Вернемся теперь к определению понятия линейного пространства. Легко проверить, что условия (I—VI) описывают не метрические свойства плоского пространства, а только его аффинные свойства. Поэтому можно утверждать, что *линейное пространство* — это *абстрактное аффинное пространство* любого конечного числа измерений.

§ 2. Размерность линейного пространства

Как известно, пространство как форма существования материи, т. е. наше реальное пространство, имеет три измерения — длину, ширину и высоту. Тем не менее в теоретической физике широко используют как некую математическую абстракцию пространство большего числа измерений. Поэтому изучение линейных пространств любого числа измерений имеет важное значение для математической физики. Чтобы выяснить, как определяется *размерность* пространства, введем понятие *линейной независимости векторов*.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Иными словами, ни один из векторов \vec{a}_i нельзя представить в виде линейной комбинации $(n-1)$ остальных векторов. Если же равенство $\sum_k^n \alpha_k \vec{a}_k = 0$ может быть удовлетворено хотя бы при одном ненулевом α_i , то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ являются линейно зависимыми. В этом случае всегда можно один из векторов представить в виде линейной комбинации остальных:

$$\vec{a}_i = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \vec{a}_{i-1} + \beta_{i+1} \vec{a}_{i+1} + \dots + \beta_n \vec{a}_n.$$

Теперь можно перейти к определению размерности пространства.

Рассмотрим прямую (одномерное пространство). Ясно, что любые два вектора \vec{a} и \vec{b} на ней могут отличаться только численным множителем:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}.$$

Это значит, что в одномерном пространстве имеется только один линейно независимый вектор.

Соответственно на плоскости (двумерное пространство) всегда можно выбрать два линейно независимых вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 (для этого достаточно, чтобы они не были коллинеарными). Но любой третий вектор \vec{b} на этой плоскости можно разложить по этим векторам \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , т. е. представить в виде линейной комбинации:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

В трехмерном евклидовом пространстве всегда можно выбрать три некомпланарных линейно независимых вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Но любые четыре вектора обязательно линейно зависимы:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3.$$

Приведенные примеры показывают, что максимальное число линейно независимых векторов пространства совпадает с размерностью этого пространства.

Естественно поэтому ввести такое определение.

Линейное пространство называется *n*-мерным, если в нем существует *n* и только *n* линейно независимых векторов.

Совокупность *n* линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ *n*-мерного пространства называется **базисом** этого пространства.

Нетрудно убедиться в том, что не только в обычном трехмерном, но и пространстве любой размерности справедливо следующее утверждение:

В *n*-мерном пространстве можно каждый вектор \vec{x} представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса: $\vec{x} = \vec{x}_1 \vec{e}_1 + \vec{x}_2 \vec{e}_2 + \dots + \vec{x}_n \vec{e}_n$.

Числа x_1, x_2, \dots, x_n называют координатами вектора \vec{x} в данном базисе.

Наконец, очень просто проверить, что при сложении двух векторов \vec{x} и \vec{y} их координаты складываются, а при умножении вектора \vec{x} на число λ его координаты умножаются на это число.

Важным понятием линейной алгебры является *изоморфизм*.

Линейные пространства R и R' называются изоморфными, если между векторами \vec{x} из R и векторами \vec{x}' из R' можно установить такое взаимно однозначное соответствие $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$, что если вектору \vec{x} соответствует вектор \vec{x}' , а вектору $\vec{y} \rightarrow \vec{y}'$, то: а) вектору $\vec{x} + \vec{y}$ соответствует вектор $\vec{x}' + \vec{y}'$ и б) вектору $\lambda \vec{x}$ соответствует вектор $\lambda \vec{x}'$.

Можно показать, что все пространства, имеющие одну и ту же размерность n , изоморфны друг другу и, наоборот, пространства различной размерности заведомо не изоморфны друг другу.

Изоморфизм векторных множеств различной природы позволяет переносить любой результат, вытекающий из свойств линейных операций для данного множества, на произвольное другое изоморфное множество. При этом конкретная природа как самих элементов, так и операций над ними может быть совсем различной.

Существенным свойством линейных пространств является наличие в них *подпространств*.

Подпространством R' пространства R называется такая совокупность элементов из R , которая сама образует линейное пространство относительно определенных в R операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Примером подпространства в множестве векторов обычного трехмерного пространства является произвольное множество компланарных векторов, образующих двумерное векторное пространство, соответствующее плоскости в реальном пространстве. Обратим внимание, что далеко не всякая совокупность элементов линейного пространства образует подпространство. Очевидно, чтобы последнее имело место, необходимо, хотя этого и не достаточно, чтобы указанная совокупность включала нулевой элемент.

Ясно, что размерность любого подпространства не превосходит размерности своего пространства.

Существует весьма простой общий способ выделения из любого линейного пространства R некоторых подпространств. Выберем в R произвольную совокупность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ и составим из них множество всевозможных линейных комбинаций. Легко видеть, что полученное таким образом векторное множество образует определенное подпространство, порожденное векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.

Подпространство n -мерного пространства, порожденное k линейно-независимыми векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$, является k -мерным (векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ образуют базис этого подпространства).

Очевидно, что любое n -мерное пространство содержит подпространства всех меньших измерений.

Простейшее подпространство — это *нулевое*, содержащее один нулевой элемент. Следующим являются *одномерные* пространства, базис каждого одномерного пространства состоит из одного вектора \vec{e}_1 . Ясно, что указанное одномерное подпространство представляет собой множество векторов вида $\alpha\vec{e}_1$, где α — произвольное число. Множество $\alpha\vec{e}_1$ по аналогии с обычным пространством называют *прямой* в линейном пространстве R n -измерений.

Совершенно так же двумерное подпространство с базисными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , представляющие собой множество векторов вида $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$ (где α_1 и α_2 — произвольные числа), можно назвать *плоскостью* в R . Если $n > 3$, то по аналогии можно построить трехмерное подпространство (*гиперплоскость*) $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$.

§ 3. Евклидово пространство

Ранее мы уже отмечали, что рассматривавшиеся до сих пор линейные или аффинные пространства беднее по своим геометрическим свойствам, чем обычное евклидово пространство. Это объясняется тем, что в них не определены метрические понятия — длина вектора, угол между двумя векторами, площадь фигуры и т. п.