

Ясно, что размерность любого подпространства не превосходит размерности своего пространства.

Существует весьма простой общий способ выделения из любого линейного пространства  $R$  некоторых подпространств. Выберем в  $R$  произвольную совокупность векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  и составим из них множество всевозможных линейных комбинаций. Легко видеть, что полученное таким образом векторное множество образует определенное подпространство, порожденное векторами  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ .

Подпространство  $n$ -мерного пространства, порожденное  $k$  линейно-независимыми векторами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ , является  $k$ -мерным (векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$  образуют базис этого подпространства).

Очевидно, что любое  $n$ -мерное пространство содержит подпространства всех меньших измерений.

Простейшее подпространство — это *нулевое*, содержащее один нулевой элемент. Следующим являются *одномерные* пространства, базис каждого одномерного пространства состоит из одного вектора  $\vec{e}_1$ . Ясно, что указанное одномерное подпространство представляет собой множество векторов вида  $\alpha\vec{e}_1$ , где  $\alpha$  — произвольное число. Множество  $\alpha\vec{e}_1$  по аналогии с обычным пространством называют *прямой* в линейном пространстве  $R$   $n$ -измерений.

Совершенно так же двумерное подпространство с базисными векторами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , представляющие собой множество векторов вида  $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$  (где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные числа), можно назвать *плоскостью* в  $R$ . Если  $n > 3$ , то по аналогии можно построить трехмерное подпространство (*гиперплоскость*)  $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ .

### § 3. Евклидово пространство

Ранее мы уже отмечали, что рассматривавшиеся до сих пор линейные или аффинные пространства беднее по своим геометрическим свойствам, чем обычное евклидово пространство. Это объясняется тем, что в них не определены метрические понятия — длина вектора, угол между двумя векторами, площадь фигуры и т. п.

Для того чтобы превратить двумерное аффинное пространство в евклидово, нужно, очевидно, резиновую пленку натянуть на жесткий каркас, так чтобы ее более нельзя было подвергнуть такому растяжению или сжатию. Все геометрические свойства фигур, расположенные на такой «затвердевшей» пленке, будут уже относиться к евклидовой геометрии: они будут сохраняться только при вращении плоскости как целого (ортогональное преобразование). На такой «затвердевшей» плоскости метрические понятия принимают однозначный смысл.

Итак, чтобы линейное пространство превратилось в евклидово, нужно сформулировать еще ряд дополнительных аксиом, из которых как следствия будут вытекать все метрические свойства пространства. Ясно, что эти аксиомы можно выбрать различными эквивалентными способами.

Но, оказывается, наиболее удобным для наших целей является введение определения (аксиомы) скалярного произведения векторов.

*Линейное пространство  $R$  называется евклидовым, если каждой паре векторов  $\vec{x}, \vec{y}$  из  $R$  поставлено в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением  $(\vec{x}, \vec{y})$ , которое обладает следующими свойствами:*

- 1)  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$  — (коммутативность),
- 2)  $(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$  — ( $\lambda$  — действительное число),
- 3)  $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$  — (дистрибутивность).

4) Скалярный квадрат произвольного вектора  $(\vec{x}, \vec{x})$  является положительной величиной, только  $(\vec{0}, \vec{0}) = 0$ .

В полученном таким образом евклидовом пространстве легко определяются и другие метрические свойства.

Длиной вектора  $\vec{x}$  называют корень из его скалярного квадрата

$$|\vec{x}| = +\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}. \quad (1)$$

Углом между векторами  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  называют число  $\varphi$ , определяемое формулой:

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}. \quad (2)$$

Ясно, что определения (1) и (2) распространяют свойства скалярного произведения в обычном пространстве на произвольные евклидовые пространства.

В частности, два вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  называются **ортогональными**, если  $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ .

Легко убедиться, что для двух ортогональных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  имеет место равенство

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2,$$

представляющее собой теорему Пифагора.

Можно также доказать, что для произвольных двух векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  имеет место неравенство Коши—Буняковского:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}). \quad (3)$$

В отличие от аффинного пространства, где все базисы (косоугольные декартовы координаты) равноправны, в евклидовом пространстве существуют особенно удобные базисы — ортогональные.

Если  $n$  ненулевых векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  попарно ортогональны, то они образуют **ортогональный базис в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R$** .

Чтобы это определение имело смысл, нужно доказать, что векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  линейно независимы. Нетрудно убедиться, что так оно и есть.

Можно еще доказать, что во всяком линейном пространстве существуют ортогональные базисы. При этом векторы ортогонального базиса можно еще нормировать, т. е. выбрать их такими, чтобы каждый имел единичную длину. Следовательно, векторы ортогонального базиса удовлетворяют равенству:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (4)$$

Благодаря наличию условия (4) очень просто выражается скалярное произведение  $(\vec{x}, \vec{y})$  двух векторов:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad \text{и} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i,$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_i x_i y_i. \quad (5)$$

Если же в евклидовом пространстве базис является аффинным, то выражение будет более сложным:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i^n \sum_k^n g_{ik} x_i y_k, \quad (6)$$

где коэффициенты  $g_{ik}$  ( $\vec{e}_i, \vec{e}_k$ ) можно рассматривать как элементы так называемой *фундаментальной*  $n$ -рядной симметричной матрицы

$$\|g\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

(где  $g_{ik} = g_{ki}$ ), характеризующей базис пространства.

В случае ортонормированного базиса фундаментальная матрица принимает простейший вид:

$$\|g\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (7')$$

Далее легко проверить, что в ортонормированном базисе координаты любого вектора  $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$  суть скалярные произведения этого вектора на соответствующие базисные векторы:

$$x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i). \quad (8)$$

Отсюда ясно, что координаты вектора совпадают с его проекциями на базисные векторы (оси координат). Заметим, что такое утверждение не имеет места в аффинном базисе.

В ортонормированном базисе согласно (5) квадрат вектора равен сумме квадратов его координат:

$$(\vec{x})^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_i^n x_i^2. \quad (5')$$

Отсюда для длины вектора получаем формулу:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (9)$$