## § 4. Комплексное линейное пространство

До сих пор мы имели дело только с пространствами над полем действительных чисел. В квантовой механике особое значение имеют линейные пространства над полем комплексных чисел—*комплексные векторные пространства.*

Все аффинные свойства действительного пространства, рассмотренные в § 1, справедливы и для комплексного пространства. Незначительные изменения появляются только при введении метрических понятий.

Комплексное пространство $U$ называется *евклидовым* (или *унитарным*), если каждой паре векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ из $U$ поставлено в соответствие комплексное число $(\vec{x}, \vec{y})$, называемое *скалярным произведением*, и выполняются следующие аксиомы:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})^*$ (значок * означает комплексное сопряжение),

2) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$,

3) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y})$,

4) $(\vec{x}, \vec{x})$ есть действительное положительное число.

Легко видеть, что эта система аксиом отличается от системы аксиом действительного евклидова пространства только первой аксиомой, согласно которой при перестановке векторных сомножителей скалярное произведение меняется на комплексно-сопряженное. Это отличие не ведет к глубоким различиям, но некоторые особенности появляются. Так, в то время как в действительном пространстве $(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$, в комплексном евклидовом пространстве $(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda^*(\vec{x}, \vec{y})$.

Основные метрические понятия для унитарного пространства вводятся совершенно аналогично тому, как они вводятся для действительного евклидова пространства. Длиной вектора называют величину

$$|\vec{x}| = +\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Так как скалярное произведение двух векторов, вообще говоря, комплексно, то нет смысла определять угол между векторами: рассматривают только случай, когда векторы ортогональны.

Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называют ортогональными, если $(\vec{x}, \vec{y})=0$. Очевидно, что и $(\vec{y}, \vec{x})=(\vec{x}, \vec{y})^*=0$.

Вся теория действительного евклидова пространства легко переносится на унитарное пространство. Если, например, векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ характеризуются в $n$-мерном унитарном пространстве комплексными координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то скалярное произведение этих векторов равно

$$(\vec{x}, \vec{y})=\sum_i^n x_i y_i^*.$$

В частности, для скалярного квадрата имеем:

$$\vec{x}^2=(\vec{x}, \vec{x})=\sum_i^n x_i^2.$$

# Глава II.

## АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

### § 1. Линейные операторы и операции над ними

Ранее мы уже встречались с понятием линейного оператора (аффинора) в обычном евклидовом пространстве. Сейчас приведем общее определение *аффинного преобразования*, или *линейного оператора*, в произвольном (действительном или комплексном) $n$-мерном пространстве $R$.

**Линейным оператором $\hat{A}$ в пространстве $R$ называют правило или закон, который каждый вектор $\vec{x}$ из $R$ переводит в вектор $\vec{y}$ из этого же пространства**

$$\vec{y}=\hat{A}(\vec{x}) \tag{1}$$

**и подчиняется условиям:**

$$\left.\begin{aligned} &\hat{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\hat{A}(\vec{x}_1)+\hat{A}(\vec{x}_2), \\ &\hat{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\hat{A}(\vec{x}). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

С геометрической точки зрения линейные преобразования замечательны тем, что сохраняют аффинные свойства пространства. Среди линейных преобразований особую роль играют простейшие операторы: а) *единичный*, или