

Векторы \vec{x} и \vec{y} называют ортогональными, если $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Очевидно, что и $(\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y})^* = 0$.

Вся теория действительного евклидова пространства легко переносится на унитарное пространство. Если, например, векторы \vec{x} и \vec{y} характеризуются в n -мерном унитарном пространстве комплексными координатами (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) , то скалярное произведение этих векторов равно

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i^n x_i y_i^*.$$

В частности, для скалярного квадрата имеем:

$$\vec{x}^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = \sum_i^n x_i^2.$$

Глава II.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейные операторы и операции над ними

Ранее мы уже встречались с понятием линейного оператора (аффинора) в обычном евклидовом пространстве. Сейчас приведем общее определение *аффинного преобразования*, или *линейного оператора*, в произвольном (действительном или комплексном) n -мерном пространстве R .

Линейным оператором \hat{A} в пространстве R называют правило или закон, который каждый вектор \vec{x} из R переводит в вектор \vec{y} из этого же пространства

$$\vec{y} = \hat{A}(\vec{x}) \quad (1)$$

и подчиняется условиям:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= \hat{A}(\vec{x}_1) + \hat{A}(\vec{x}_2), \\ \hat{A}(\lambda \vec{x}) &= \lambda \hat{A}(\vec{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С геометрической точки зрения линейные преобразования замечательны тем, что сохраняют аффинные свойства пространства. Среди линейных преобразований особую роль играют простейшие операторы: а) *единичный*, или

тождественный оператор \hat{I} , ставящий в соответствие каждому вектору этот же самый вектор, т. е. $\hat{I}\vec{x} = \vec{x}$; б) нулевой оператор $\hat{0}$, который любому вектору \vec{x} сопоставляет нулевой вектор $\hat{0}\vec{x} = 0$; в) *оператор подобия* \hat{A} , сопоставляющий всякому вектору \vec{x} новый вектор, отличающийся от \vec{x} одним и тем же численным множителем $\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (где $\lambda = \text{const}$).

Познакомимся теперь с количественной характеристикой различных линейных операторов.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — некоторый базис в n -мерном пространстве R и \hat{A} — линейный оператор в R . В результате действия аффинора \hat{A} на базисные векторы \vec{e}_i получаются некоторые векторы \vec{e}'_i , которые можно рассматривать как новый базис:

$$\vec{e}'_i = \hat{A}\vec{e}_i.$$

Нетрудно убедиться, что всегда существует линейный оператор \hat{A} (и притом только один), переводящий базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в базис $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$.

Положим, что векторы \vec{e}'_i выражаются через векторы старого базиса \vec{e}_i с помощью соотношений:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{1n}\vec{e}_n, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vec{e}'_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n, \end{array} \right\} \quad (3)$$

или (в сокращенной записи):

$$\vec{e}'_i = \sum_k^n a_{ik}\vec{e}_k. \quad (3')$$

Легко видеть, что преобразование (3) удовлетворяет условиям (2) и является поэтому аффинным. С точки зрения алгебры отличительной особенностью этих преобразований является линейность функций, связывающих старые и новые базисные векторы. Коэффициенты a_{ik} определяют

n-рядную матрицу:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

которая называется *матрицей линейного оператора* \hat{A} .

Таким образом, в заданном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ каждому линейному оператору \hat{A} соответствует определенная матрица $A = \|a_{ik}\|$. И обратно — каждой матрице A отвечает некоторый линейный оператор \hat{A} , определяемый формулами (3) или (3').

Иными словами, аффинные преобразования можно описывать с помощью матриц и матричное исчисление является наиболее удобным алгебраическим аппаратом для изучения линейных операторов в векторных пространствах конечного числа измерений.

Подчеркнем, что линейный оператор имеет инвариантный смысл — он превращает вектор \vec{x} в определенный вектор \vec{y} , независимо от выбора базиса, однако вид соответствующей матрицы при изменении базиса меняется.

Линейные операторы можно складывать и умножать.

Суммой двух операторов \hat{A} и \hat{B} называется оператор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, результат действия которого на произвольный вектор \vec{x} равен сумме результатов действия на этот вектор операторов \hat{A} и \hat{B} :

$$\hat{C}\vec{x} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{x}.$$

Легко видеть, что операция сложения ассоциативна и коммутативна. Любой оператор \hat{A} можно умножить на числа λ из поля P .

Произведением оператора \hat{A} на число λ называется оператор $\hat{D} = \lambda\hat{A}$, действие которого на произвольный вектор \vec{x} равно умноженному на число λ результату действия на этот вектор оператора \hat{A} :

$$\hat{D}\vec{x} = \lambda\hat{A}\vec{x}.$$

Таким образом, множество линейных операторов образует линейное пространство.

Оказывается, однако, что для элементов этого линейного пространства имеет смысл еще операция умножения двух операторов.

Оператор \hat{C} называется произведением оператора \hat{B} на оператор \hat{A} , если для любого вектора \vec{x}

$$\hat{C}\vec{x} = \hat{B}(\hat{A}\vec{x}).$$

Произведение линейных операторов \hat{B} и \hat{A} также является линейным оператором $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$.

Легко проверить, что, вообще говоря, произведение операторов некоммутативно: $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{A}\hat{B}$. Можно сказать, что линейное пространство линейных операторов образует *некоммутативную алгебру*. Тем не менее среди множества операторов могут встретиться такие пары *коммутирующих операторов*, произведение которых перестановочно:

$$\hat{F}\hat{G} = \hat{G}\hat{F}.$$

В частности, единичный вектор \hat{I} коммутирует с любым другим оператором. Встречаются еще *антикоммутующие операторы*, которые при перестановке меняют знак произведения:

$$\hat{F}\hat{G} = -\hat{G}\hat{F}.$$

Очевидно, что операторы можно возводить в произвольную целую степень:

$$\underbrace{\hat{A}^n}_{n \text{ раз}} = \hat{A}\hat{A}\dots\hat{A}.$$

Умев находить сумму и произведение линейных операторов, можно найти любой полином от оператора \hat{A} . Так, если

$$P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$$

есть некоторый многочлен m -й степени переменной t , то под полиномом $P(\hat{A})$ понимают линейный оператор

$$P(\hat{A}) = a_0 \hat{A}^m + a_1 \hat{A}^{m-1} + \dots + a_m.$$

*Оператором, обратным к \hat{A} , называют оператор \hat{A}^{-1} , удовлетворяющий условию $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$. Не для всякого оператора существует обратный. Операторы, имеющие соответствующие обратные операторы, называются *невырожденными*. Ясно, что для невырожденных операторов имеет смысл возвведение в целую отрицательную степень:*

$$\hat{A}^{-n} = (\hat{A}^{-1}) = \underbrace{\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A}^{-1} \dots \hat{A}^{-1}}_{n \text{ раз}}.$$

Поскольку каждый линейный оператор \hat{A} характеризуется в некотором базисе e_i определенной матрицей A , то матрицы также образуют *некоммутативную алгебру*, в которой сумме, произведению и степени операторов соответствуют суммы, произведения и степени их матриц.

Вырожденным операторам, не имеющим обратных операторов, соответствуют *особые матрицы*, определители которых равны нулю.

Если оператор \hat{A} преобразует вектор \vec{x} в вектор \vec{y} , то \vec{y} называется *образом* вектора \vec{x} , а \vec{x} — *прообразом* вектора \vec{y} . Совокупность T_A всех образов называется *областью значений линейного оператора \hat{A}* . Она образует некоторое подпространство линейного векторного пространства R . Размерность подпространства T_A называют *рангом* оператора \hat{A} и обозначают Z_A .

Для каждого оператора \hat{A} можно, вообще говоря, выделить из всего множества векторов линейного пространства R некоторое подмножество M_A таких векторов \vec{x} , что $\hat{A}\vec{x} = 0$. Подмножество M_A образует в R подпространство, называемое *ядром оператора \hat{A}* , размерность m_A ядра называется *дефектом* оператора \hat{A} .

Можно показать, что сумма размерностей подпространств T_A и M_A равна размерности линейного пространства R , т. е. сумма ранга и дефекта оператора равна n :

$$r_A + m_A = n.$$

Другими словами, каждый линейный оператор \hat{A} разбивает все множество векторов пространства R на два *не-*

пересекающихся (т. е. не имеющих общих элементов) подмножества:

$$T_A + M_A = R.$$

В частности, если оператор \hat{A} невырожден, то его дефект равен нулю и $M_A = 0$. В этом случае ранг оператора r_A равен размерности n пространства R .

Пусть, например, линейное пространство R представляет собой множество всевозможных радиус-векторов реального трехмерного пространства, а оператор \hat{A} проецирует эти радиус-векторы на плоскость XOY . Ясно, что векторы, коллинеарные оси Z , образуют одномерное подпространство M_A . Проекции же векторов образуют двумерное множество T_A , так что $r_A + m_A = 3$.

Матричное исчисление широко используется в современной теоретической физике. Поэтому перейдем к более подробному изучению соответствующих операторам матриц и действиям над ними.

§ 2. Матричная алгебра

Матрицей порядка $n \times m$ называют математическую величину A , характеризуемую $n \times m$ числами, расположенными в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

В физике обычно встречаются *квадратные матрицы* порядка $n \times n$:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

столбцевые матрицы порядка $n \times 1$:

$$\Psi = \left\| \psi_i \right\| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$