пересекающихся (т. е. не имеющих общих элементов) *подмножества*:

$$T_A + M_A = R.$$

В частности, если оператор $\hat{A}$ невырожден, то его дефект равен нулю и $M_A = 0$. В этом случае ранг оператора r_A равен размерности n пространства R.

Пусть, например, линейное пространство R представляет собой множество всевозможных радиус-векторов реального трехмерного пространства, а оператор $\hat{A}$ проецирует эти радиус-векторы на плоскость XOY. Ясно, что векторы, коллинеарные оси Z, образуют одномерное подпространство M_A. Проекции же векторов образуют двумерное множество T_A, так что $r_A + m_A = 3$.

Матричное исчисление широко используется в современной теоретической физике. Поэтому перейдем к более подробному изучению соответствующих операторам матриц и действиям над ними.

§ 2. Матричная алгебра

Матрицей порядка $n \times m$ называют математическую величину A, характеризуемую $n \times m$ числами, расположенными в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов:

$$A \equiv \| a_{ik} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}.$$

В физике обычно встречаются *квадратные матрицы* порядка $n \times n$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

столбцевые матрицы порядка $n \times 1$:

$$\Psi \equiv \| \psi_i \| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

и *строчные матрицы* порядка $1 \times n$:

$$\tilde{\Psi} \equiv \| \tilde{\psi}_i \| = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n).$$

Матрицы A и B одинакового порядка равны между собой ($A = B$), если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е. $a_{ik} = b_{ik}$.

Суммой матриц A и B (одинакового порядка) называется матрица $C = A + B$, у которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов слагаемых матрицы:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Произведением матрицы A на число λ называют матрицу $D = \lambda A$, элементы которой $d_{ik} = \lambda a_{ik}$.

Произведением матрицы A порядка $n \times m$ на матрицу B порядка $m \times l$ называют матрицу $C = A \cdot B$, у которой элемент c_{ik} равен сумме произведений всех элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = \sum_{j}^{m} a_{ij} b_{jk}. \qquad (2)$$

Заметим, что произведение матриц определенно лишь тогда, когда число столбцов у матрицы A равно числу строк у матрицы B.

Матрицу $\tilde{A}$, получаемую из A заменой строк столбцами и наоборот, называют *транспонированной матрицей* $a_{ik} = a_{ki}$.

Если $\tilde{A} = A$, то матрица A называется *симметричной* ($a_{ik} = a_{ki}$). Если же $\tilde{A} = -A$, то матрицу A называют *антисимметричной* ($a_{ik} = -a_{ki}$); все ее диагональные элементы равны нулю ($a_{kk} = 0$). Отметим, что имеет место тождественное равенство $\widetilde{(AB)} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$.

Легко видеть, что матрица $\tilde{A}$, транспонированная по отношению к матрице A порядка $n \times m$, имеет порядок $m \times n$. В частности, строчная матрица $\tilde{\Psi}$ и столбцевая матрица Ψ являются взаимно транспонированными.

Ясно, что квадратную n-рядную матрицу $A \equiv \| a_{ik} \|$ можно умножать на столбцевую матрицу $\Psi \equiv \| \psi_i \|$ порядка $n \times 1$ только справа, а на строчную $\tilde{\Psi} \equiv \| \tilde{\psi}_i \|$ — слева;

при этом в первом случае получается матрица-столбец, а во втором — матрица-строка. Символически это изображают так:

$$\square \times \square = \square,$$
$$\square \times \square = \square.$$

Очевидно, что при умножении матрицы-строки порядка $(1 \times n)$ на матрицу-столбец порядка $(n \times 1)$ получается матрица порядка 1×1, т. е. попросту число:

$$\tilde{\Psi} \cdot \Psi = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_n) \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_1\psi_1 + \tilde{\psi}_2\psi_2 + \ldots + \tilde{\psi}_n\psi_n.$$

При перемножении двух квадратных матриц порядка $n \times n$ получается квадратная матрица того же порядка:

$$\square \times \square = \square.$$

Произведение матриц, как и операторов, вообще говоря, некоммутативно:

$$AB \neq BA.$$

Среди квадратных матриц особую роль играют *диагональные матрицы*, у которых отличны от нуля только элементы с одинаковыми индексами:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что соответствующий диагональной матрице оператор $\hat{A}$ «растягивает» векторы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ соответственно в $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ раз:

$$\vec{e}_i' = \lambda \vec{e}_i.$$

В частности, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = c$, то такой ска-

лярной матрице

$$A=\begin{pmatrix} c & & & & \\ & c & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & c \end{pmatrix}$$

соответствует линейное преобразование подобия $\hat{\Lambda}$, равномерно «растягивающее» в c раз (или «сжимающее» — при $c<1$) все базисные векторы.

Наконец, единичному и нулевому операторам соответствуют матрицы:

$$=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad 0=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 \end{Vmatrix}.$$

Важной характеристикой всякой матрицы A является ее определитель $\det A$. Всякая неособенная матрица A (для нее $\det A \neq 0$) имеет обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{Vmatrix},$$

где $d=\det A$, A_{ij} — алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij}. Очевидно, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Легко убедиться, что определитель произведения двух квадратных матриц $C=A\cdot B$ равен произведению определителей сомножителей:

$$\det C=\det A\cdot\det B.$$

Если матрица A содержит комплексные элементы, то вводят понятие *комплексно-сопряженной* по отношению к A матрицы A^*, элементы которой a_{ik}^* отличаются от соответствующих элементов a_{ik} только комплексным сопряжением:

$$a_{ik}^*=(a_{ik})^*.$$

Ясно, что если $A^*=A$, то матрица A является действительной.

Матрица A^+, получаемая из A путем транспонирования ее и комплексного сопряжения называется *эрмитово-сопряженной* матрицей по отношению к матрице A:

$$a^+_{ik} = a^*_{ki}.$$

Если $A^+ = A$, то матрица A называется *эрмитовой* или *самосопряженной*. Такие матрицы широко используются в квантовой механике.

Важным понятием матричной алгебры является *ранг матрицы*.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок r отличных от нуля миноров, составленных из элементов A.

Ясно, что в случае квадратных матриц порядка n их ранг может принимать значения от 0 (для нулевой матрицы) до n для неособенных матриц, определитель которых отличен от нуля.

§ 3. Исследование линейных преобразований с помощью матриц. Характеристический многочлен

Выберем в n-мерном линейном пространстве R некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и рассмотрим векторную матрицу-столбец:

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix},$$

компонентами которой являются базисные векторы. Пусть в результате линейного преобразования $\hat{A}$ каждый вектор $\vec{e}_i$ «старого» базиса превратится в соответствующий вектор $\vec{e}'_i$ «нового» базиса: $\hat{A}\vec{e}_i = \vec{e}'_i$. Тогда это преобразование в матричной форме примет следующий вид:

$$A\vec{\Psi} = \vec{\Psi}', \tag{3}$$

где A — матрица линейного оператора $\hat{A}$, а $\vec{\Psi}'$ — векторная