Матрица A^+, получаемая из A путем транспонирования ее и комплексного сопряжения называется *эрмитово-сопряженной* матрицей по отношению к матрице A:

$$a^+_{ik} = a^*_{ki}.$$

Если $A^+ = A$, то матрица A называется *эрмитовой* или *самосопряженной*. Такие матрицы широко используются в квантовой механике.

Важным понятием матричной алгебры является *ранг матрицы*.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок r отличных от нуля миноров, составленных из элементов A.

Ясно, что в случае квадратных матриц порядка n их ранг может принимать значения от 0 (для нулевой матрицы) до n для неособенных матриц, определитель которых отличен от нуля.

§ 3. Исследование линейных преобразований с помощью матриц. Характеристический многочлен

Выберем в n-мерном линейном пространстве R некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и рассмотрим векторную матрицу-столбец:

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix},$$

компонентами которой являются базисные векторы. Пусть в результате линейного преобразования $\hat{A}$ каждый вектор $\vec{e}_i$ «старого» базиса превратится в соответствующий вектор $\vec{e}'_i$ «нового» базиса: $\hat{A}\vec{e}_i = \vec{e}'_i$. Тогда это преобразование в матричной форме примет следующий вид:

$$A\vec{\Psi} = \vec{\Psi}', \tag{3}$$

где A — матрица линейного оператора $\hat{A}$, а $\vec{\Psi}'$ — векторная

столбцевая матрица нового базиса:

$$\vec{\Psi}' = \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix}.$$

Понятно, что обратное преобразование, превращающее новый базис $\vec{\Psi}'$ в старый $\vec{\Psi}$, записывается аналогично:

$$A^{-1}\vec{\Psi}' = \vec{\Psi}. \qquad (3')$$

Будем далее развивать матричную символику с целью изучения линейных преобразований.

Координаты произвольного вектора $\vec{x}$ в n-мерном пространстве можно объединить в единую матрицу-строку:

$$\tilde{\Phi} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Поскольку векторы базиса образуют векторную матрицу-столбец $\vec{\Psi}$, то произвольный вектор

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i$$

можно рассматривать как произведение строчной матрицы $\tilde{\Phi}$ на столбцевую матрицу $\vec{\Psi}$:

$$\vec{x} = (x_1\ \ldots\ x_n) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = \tilde{\Phi} \cdot \vec{\Psi}. \qquad (4)$$

В ином базисе $\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n'$, связанном с исходным преобразованием $\hat{A}$, тот же вектор будет определяться матричным равенством:

$$\vec{x} = (x_1'\ \ldots\ x_n') \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}' \cdot \vec{\Psi}'. \qquad (4')$$

Выясним теперь, как связаны координаты x_i' вектора в новом базисе $\vec{\psi}'$ с координатами x_i того же вектора в старом базисе $\vec{\psi}$.

Приравняв правые части (4) и (4′) и подставив в (4′) вместо матрицы $\vec{\psi}$ ее значение из (3′), получим:

$$\tilde{\Phi}' \cdot \vec{\Psi}' = \tilde{\Phi} \cdot A^{-1} \cdot \vec{\Psi}'.$$

Отсюда

$$\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi} \cdot A^{-1}.$$

Транспонируя это матричное равенство, приходим к соотношению:

$$\Phi' = \tilde{A}^{-1} \cdot \Phi,$$

или (в развернутом виде):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix} = \tilde{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Итак, в то время как базисные векторы $\vec{e}_i$ преобразуются с помощью матрицы A, координаты векторов преобразуются с помощью обратной транспонированной матрицы A^{-1}.

Всякий линейный оператор $\hat{A}$ характеризуется в каждом базисе своей матрицей, поэтому необходимо еще установить аналитическую связь между матрицами, определяющими один и тот же оператор в различных базисах.

Пусть базисы $\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$ и $\vec{\Psi}' = \begin{pmatrix} \vec{e}' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix}$ связаны между собой матрицей преобразования C:

$$\vec{\Psi}' = C\vec{\Psi}.$$

Пусть, кроме того, существует некоторый линейный оператор $\hat{A}$, матрица которого в базисе $\vec{\Psi}$ имеет вид $A = \|a_{ik}\|$, а в базисе $\vec{\Psi}'$ он принимает вид $A' = \|a_{ik}'\|$. Задача сводится к установлению зависимости между A' и A.

Оказывается (доказательство приводить не будем), что

$$A' = C^{-1}AC. \qquad (6)$$

Следовательно, каждому линейному оператору в данном линейном пространстве соответствует бесчисленное множество *подобных* матриц A, A', A'', ..., каждая из которых описывает оператор $\hat{A}$ в своем базисе. Две подобные матрицы связаны друг с другом соотношением $A' = C^{-1}AC$, где неособенная матрица C характеризует линейное преобразование соответствующих базисов. Обратим внимание на то, что определители всех подобных матриц между собой равны. Нетрудно также доказать, что и *следы* подобных матриц одинаковы. (*Следом матрицы* называют сумму всех ее диагональных элементов $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \Sigma a_{ii}$.) Иными словами, определитель и след матрицы преобразования являются инвариантами.

Уже при изучении двумерных тензоров мы установили, что обычно существует некоторая преимущественная система координат, в которой матрица компонентов тензора имеет простейший вид.

Перейдем теперь к решению аналогичной задачи в общем случае комплексного линейного пространства n измерений.

Пусть дан оператор $\hat{A}$, который каждому вектору $\vec{x}$ рассматриваемого пространства ставит в соответствие новый вектор $\vec{y}$. Если при действии этого оператора на некоторый вектор $\vec{x}$ получается вектор, отличающийся от первоначального численным множителем

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad (7)$$

то ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* оператора $\hat{A}$, а число λ — *собственным значением*[1].

Каждый линейный оператор может иметь несколько различных собственных векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ... Понятно, что если $\vec{x}$ — собственный вектор, то и $\alpha\vec{x}$ (где α — любое число) тоже является собственным вектором; но такие два коллинеарных вектора не считаются существенно различными.

[1] Заметим, что в случае действительного векторного пространства собственные числа λ являются действительными.

Чтобы определить собственные векторы оператора $\hat{A}$, учтем, что при действии $\hat{A}$ на такой вектор $\vec{x}$ должно выполняться равенство (7), т. е.

$$(\hat{A}-\lambda\hat{I})\vec{x}=0. \qquad (7')$$

Поскольку $\vec{x}\neq 0$, то отсюда следует, что матрица $A-\lambda I$ особенная, и ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (8)$$

Это — *характеристическое уравнение* оператора $\hat{A}$. Его левая часть

$$P(\lambda)=\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+C_1\lambda+C_0 \qquad (9)$$

называется *характеристическим полиномом*. Его коэффициенты C_{n-1} и C_0 выражаются так:

$$C_{n-1}=\mathrm{Sp}\,A, \qquad C_0=\det A.$$

Как известно из алгебры, в поле комплексных чисел уравнение n-й степени $P(\lambda)=0$ имеет n корней, часть из которых могут быть кратными.

Таким образом, любой линейный оператор в n-мерном комплексном пространстве имеет n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Поступая так же, как при нахождении главных направлений плоского тензора (см. гл. I), мы для каждого собственного значения λ_k найдем соответствующий собственный вектор $\vec{x}_k$. При этом можно доказать, что если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ попарно различны, то соответствующие им собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линейно независимы.

Отсюда следует, что если все n корней характеристического полинома $P(\lambda)$ различны, то оператор в комплексном пространстве имеет n линейно независимых собственных векторов. Такой оператор называют *оператором простой структуры*.

Матрицу оператора простой структуры A всегда можно привести к диагональному виду, для этого следует в качестве базиса n-мерного пространства выбрать его соб-

ственные векторы. В этом случае мы получим:

$$\hat{A}\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1,$$
$$\hat{A}\vec{x}_2 = \ldots\lambda_2\vec{x}_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{A}\vec{x}_n = \ldots\lambda_n\vec{x}_n.$$

Поэтому матрица оператора $\hat{A}$ принимает форму:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что различие собственных чисел является достаточным, но не необходимым условием для простоты структуры оператора. Возможны отдельные случаи, когда оператор имеет n линейно-независимых векторов, хотя некоторым из них соответствуют одинаковые собственные значения. Ясно, что в «собственном» базисе матрицы таких операторов также будут диагональными; только вдоль диагонали будут встречаться одинаковые числа $\lambda_i = \lambda_k$. Однако в подавляющем большинстве случаев операторы с кратными собственными числами не имеют простой структуры и их матрицы не могут быть приведены к диагональному виду. Отсюда ясно, что операторы простой структуры являются частным видом линейных операторов. (Оказывается, что специальным выбором базиса можно несколько упростить и матрицы операторов непростой структуры, сводя их к *треугольной* [1], *квазидиагональной* [2]

[1] Треугольной называется матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

[2] Квазидиагональной называется матрица, у которой вдоль главной диагонали стоят квадратные блоки, или «подматрицы», а все остальные элементы равны нулю:

$$A = \left\| \begin{array}{c|c|c} A_{11} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & A_{22} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & & A_{33} \end{array} \right\|.$$

или *канонической (жордановой)*[1] форме.) Но соответствующая теория довольно сложна, и мы ограничимся рассмотрением наиболее простых и важных для математической физики классов линейных операторов сначала в комплексном пространстве, а затем — в действительном.

В заключение этого параграфа приведем без доказательства еще два важных свойства матриц:

1. Пусть $P(\lambda)$ есть характеристический полином матрицы A, тогда $P(A)=0$ (теорема Гамильтона — Кели).

2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A, то собственными значениями некоторого матричного многочлена $P(A)$ являются числа $P(\lambda_1)$, $P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$.

Отсюда вытекает, что след степени матрицы равен сумме степеней собственных значений матрицы-основания:

$$\operatorname{Sp} A^m = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \ldots + \lambda_n^m.$$

§ 4. Линейные преобразования в унитарном пространстве

Пусть в комплексном евклидовом пространстве задан некоторый линейный оператор $\hat{A}$. Можно доказать, что в этом пространстве всегда существует (и притом только один) сопряженный ему оператор $\hat{A}^+$, удовлетворяющий условию

$$(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y}), \tag{10}$$

где $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — произвольные два вектора унитарного пространства. На основании первой аксиомы скалярного произведения в комплексном пространстве можно определение (10) записать в эквивалентном виде:

$$(\vec{y}, A\vec{x}) = (\vec{x}, \hat{A}^+\vec{y})^*. \tag{10'}$$

Операция сопряжения, т. е. переход от $\hat{A}$ к $\hat{A}^+$, обладает

[1] Канонической называется квадратичная матрица, у которой каждый диагональный блок имеет форму:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{Vmatrix},$$

где размерность подматрицы равна кратности собственного числа λ_k.