

и альных собственных векторов. Оказывается, что и самосопряженные, и унитарные операторы являются частными типами более широкого класса нормальных операторов, обладающих указанным свойством.

Оператор N называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным:

$$\hat{N} \cdot \hat{N}^+ = \hat{N}^+ \cdot \hat{N}. \quad (13)$$

Теорема: Для того чтобы у оператора \hat{N} существовал ортогональный базис, необходимо и достаточно, чтобы \hat{N} был нормальным оператором, т. е. удовлетворял условию (13).

Докажем сначала необходимость. Пусть в некотором ортогональном базисе (который без ограничения общности можно считать нормированным) матрица A имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда в этом базисе сопряженная матрица A^* , очевидно, равна:

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & & \\ & \lambda_2^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^* \end{pmatrix},$$

т. е. она также является диагональной. Но диагональные матрицы между собой всегда перестановочны: $AA^* = A^*A$. Следовательно, оператор A нормальный.

Из основного свойства нормальных операторов вытекает, что их матрицы всегда можно привести к диагональному виду.

§ 5. Линейные операторы в действительном евклидовом пространстве

Хотя вещественное евклидово пространство является частным случаем комплексного евклидова (унитарного) пространства, свойства линейных операторов, действующих в этих пространствах, могут существенно отличаться.

Основная теорема алгебры справедлива только в поле комплексных чисел. Поэтому характеристическое уравнение $\det(\hat{A} - \lambda I) = 0$ может не иметь ни одного корня в поле действительных чисел (все собственные значения у \hat{A} комплексные). В этом случае у оператора \hat{A} не существует ни одного собственного вектора; так, линейный оператор в реальном пространстве, поворачивающий плоскость XOY вокруг оси Z на любой угол α , отличный от 180° (точнее $\alpha \neq k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$), не имеет ни одного вектора, который бы после поворота остался коллинеарным первоначальному.

Чтобы глубже изучить свойства линейных операторов в евклидовом пространстве, познакомимся с понятием *инвариантного подпространства*.

Пусть \hat{A} — линейный оператор в линейном n -мерном пространстве R (которое может быть как действительным, так и комплексным). Линейное подпространство R_1 называется *инвариантным* относительно \hat{A} , если в результате действия оператора \hat{A} на любой вектор \vec{x} из R_1 получается новый вектор $\hat{A}\vec{x}$, также принадлежащий подпространству R_1 .

Ясно, что инвариантное подпространство является общением множества векторов, коллинеарных собственному вектору оператора. В частности, совокупность векторов из R , коллинеарных некоторому собственному вектору \vec{x} оператора \hat{A} , образует одномерное инвариантное подпространство.

Приведем еще пример. Если оператор \hat{A} совершает поворот реального трехмерного пространства вокруг оси Z , то инвариантным подпространством здесь являются: а) множество векторов, расположенных вдоль оси Z (одномерное подпространство) и б) совокупность векторов в плоскости XOY (двумерное подпространство).

Теперь мы можем сформулировать важную теорему о линейных операторах в действительных линейных пространствах.

У всякого линейного оператора \hat{A} в вещественном аффинном n -мерном пространстве R существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Мы не будем строго доказывать эту теорему, а приведем

качественные рассуждения, подтверждающие ее справедливость. Выберем в R некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$; пусть оператору \hat{A} в этом базисе соответствует матрица $A = \|a_{ik}\|$. Составим соответствующее характеристическое уравнение n -ой степени:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Обозначим через λ_0 корень этого уравнения. Могут представиться два случая.

1. Корень λ_0 — число действительное. Тогда, как легко видеть, существует n действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , которые можно рассматривать как координаты в выбранном базисе такого вещественного вектора \vec{x} , что

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda_0 \vec{x}.$$

Но в этом случае множество векторов $\alpha\vec{x}$ образует одномерное инвариантное подпространство, аналогично тому, что имеет место в случае комплексного пространства.

2. Корень λ_0 — число комплексное ($\lambda_0 = \alpha + \beta i$). Этот случай не имеет аналогии в комплексных пространствах.

Координаты x_k собственного вектора, соответствующего такому λ_0 , являются, очевидно, комплексными. Обозначим их в виде $\xi_1 + \eta_1 i, \xi_2 + \eta_2 i, \dots, \xi_n + \eta_n i$. Тогда можно записать следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} (\xi_k + \eta_k i) = (\alpha + \beta i) (\xi_j + \eta_j i),$$

где $j = 1, 2, \dots, n$. Приравнивая соответственно действительные и мнимые части, получим две системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k = \alpha \xi_j - \beta \eta_j,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \eta_k = \alpha \eta_j + \beta \xi_j.$$

Рассматривая теперь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и соответственно $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ как координаты действительных векторов \vec{x} и \vec{y} , можно предыдущие равенства записать в операторной форме:

$$\begin{aligned} \hat{A}\vec{x} &= \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \\ \hat{A}\vec{y} &= \alpha\vec{y} + \beta\vec{x}. \end{aligned} \tag{14}$$

А это означает, что двумерное подпространство, порожденное векторами \vec{x} и \vec{y} , инвариантно относительно оператора \hat{A} .

Перейдем теперь к рассмотрению самосопряженных операторов в евклидовом (вещественном) пространстве. Поскольку элементы матрицы в этом пространстве действительные числа, то условие самосопряженности операторов ($a_{ik} = a_{ki}^*$) сводится к равенству $a_{ik} = a_{ki}$.

Чтобы линейный оператор был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была симметрична.

Очевидно, что и в действительном евклидовом пространстве справедливо рассмотренное в § 4 свойство самосопряженных операторов.

Существует ортонормированный («собственный») базис, в котором симметричная матрица S , соответствующая самосопряженному оператору \hat{S} , принимает диагональный вид.

Познакомимся теперь с понятием *ортогонального оператора*.

Линейный оператор \hat{A} действительного евклидова n -мерного пространства R называется ортогональным, если он сохраняет неизменным скалярное произведение любых двух векторов из R :

$$(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

В частности, полагая $\vec{x} = \vec{y}$, получаем:

$$(\hat{A}\vec{x})^2 = (\vec{x})^2.$$

Это значит, что ортогональный оператор сохраняет длины векторов. Ясно, что ортогональный оператор в действительном евклидовом пространстве играет такую же роль, что и унитарный оператор в комплексном евклидовом пространстве.

Так как в евклидовом пространстве угол между векторами определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

и при ортогональном преобразовании и числитель и знаменатель не меняются, то ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.

Как и унитарный оператор в комплексном евклидовом пространстве, ортогональный оператор в действительном евклидовом пространстве переводит ортонормированный базис в другой ортонормированный базис.

Поскольку в действительном пространстве $U^+ = \tilde{U}$, то условие унитарности матрицы $UU^+ = I$ сводится к условию ортогональности

$$A\tilde{A} = I, \quad (15)$$

или (что совершенно эквивалентно)

$$A^{-1} = \tilde{A}. \quad (15')$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей, то из (15) следует, что у ортогональной матрицы

$$(\det A)^2 = 1, \text{ или } \det A = \pm 1.$$

Ортогональные преобразования \hat{A} , определитель которых равен $+1$, называются *собственными*, а те, у которых $\det A = -1$ — *несобственными*.

Рассмотрим сначала ортогональное преобразование \hat{A} в одномерном пространстве, порожденном некоторым вектором \vec{e} . Ясно, что \vec{e} является собственным вектором оператора \hat{A} . Поэтому $\hat{A}\vec{e} = \lambda\vec{e}$.

С другой стороны, по условию ортогональности

$$(\hat{A}\vec{e}, \hat{A}\vec{e}) = (\vec{e}, \vec{e}).$$

Следовательно,

$$\lambda^2 (\vec{e}, \vec{e}) = (\vec{e}, \vec{e}),$$

откуда $\lambda = \pm 1$.

Итак, в одномерном пространстве существует лишь два ортогональных оператора: собственный $\hat{A}_1 \vec{x} = \vec{x}$ и несобственный $\hat{A}_2 \vec{x} = -\vec{x}$.

Перейдем теперь к рассмотрению двумерного пространства с ортонормированным базисом \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Пусть ортогональный оператор \hat{A} в этом базисе имеет матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

причем $\det A = ad - bc = 1$.

Поскольку \hat{A} — ортогональный оператор, то обратная матрица A^{-1} равна транспонированной \hat{A} :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Определяя же обратную матрицу A^{-1} непосредственно и учитывая, что $\det A = 1$, получаем:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}.$$

Приравнивая правые части этих равенств, приходим к выводу, что $a = d$ и $b = -c$. Поэтому матрица A имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix},$$

и $\det A = a^2 + b^2 = 1$. Заметим, что собственные числа здесь мнимы и матрицу нельзя привести к диагональному виду.

Вводя обозначения $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$, убеждаемся в том, что всякий собственный ортогональный оператор \hat{A} в двумерном пространстве имеет в ортогональном базисе матрицу вида:

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Геометрически это соответствует повороту плоскости как целое на угол φ .

Если же ортогональный оператор \hat{A} несобственный, т. е. $\det A = ad - bc = -1$, то характеристическое уравнение $\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0$ имеет действительные корни $\lambda = \pm 1$, следовательно, два взаимно перпендикулярных собственных вектора \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Тогда матрица A может иметь только один из двух видов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Геометрически это означает зеркальное отражение относительно одной из осей координат.