ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Дифференциальное уравнение для специальных функций

Многие важные задачи теоретической и математической физики приводят к дифференциальному уравнению

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \qquad (1)$$

где $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ — полиномы не выше второй степени, $\tilde{\tau}(z)$ — полином не выше первой степени. Уравнения такого вида возникают, например, при решении уравнений Лапласа и Гельмгольца в различных криволинейных системах координат методом разделения переменных, при рассмотрении основных задач квантовой механики: движение частицы в сферически-симметричном поле, гармонический осциллятор, решение уравнений Шредингера, Дирака и Клейна — Гордона для кулоновского потенциала, движение частицы в однородном электрическом и магнитном поле. Кроме того, к уравнению (1) приводят также многие модельные задачи атомной, молекулярной и ядерной физики.

Частными решениями уравнений вида (1) являются следующие классы специальных функций — классические ортогональные полиномы (полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита), сферические, цилиндрические и гипергеометрические функции. Эти функции часто называют *специальными функциями математической физики*.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что переменная z и коэффициенты полиномов $\sigma(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$, $\tilde{\tau}(z)$ могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Попытаемся с помощью замены $u = \varphi(z)y$ привести уравнение (1) к более простому виду путем специального выбора функции $\varphi(z)$. Имеем

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'}{\varphi}\,\frac{\tilde{\tau}}{\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y = 0. \qquad (2)$$

Для того чтобы уравнение (2) не было более сложным, чем исходное уравнение (1), естественно потребовать, чтобы коэффициент при y' имел вид $\tau(z)/\sigma(z)$, где $\tau(z)$ — некоторый полином не выше первой степени. Тогда для функции $\varphi(z)$ получим уравнение

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z), \tag{3}$$

где

$$\pi(z) = [\tau(z) - \tilde{\tau}(z)]/2 \tag{4}$$

есть полином не выше первой степени. Так как

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

то уравнение (2) принимает вид

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y = 0, \tag{5}$$

где

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)\left[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)\right] + \pi'(z)\sigma(z). \tag{7}$$

Функции $\tau(z)$ и $\bar{\sigma}(z)$ являются полиномами соответственно не выше первой и второй степени. Поэтому уравнение (5) является уравнением того же типа, что и уравнение (1). Таким образом, мы нашли класс преобразований, не меняющих тип уравнения,— это преобразования уравнения (1) с помощью замены $u = \varphi(z)y$, где функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению (3), в котором $\pi(z)$ — произвольный полином первой степени.

Воспользуемся произволом в выборе полинома $\pi(z)$ для того, чтобы среди всех возможных видов уравнения (5) выбрать наиболее простой и удобный для исследования свойств решений. Выберем коэффициенты полинома $\pi(z)$ из условия, чтобы входящий в (5) полином $\bar{\sigma}(z)$ делился без остатка на $\sigma(z)$, т. е.

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \tag{8}$$

где λ — постоянная. Это возможно, так как, приравнивая коэффициенты при различных степенях z в обеих частях равенства (8), мы получаем три уравнения относительно трех неизвестных постоянных — постоянной λ и двух коэффициентов полинома $\pi(z)$. В результате уравнение (5) будет иметь вид

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \tag{9}$$

Будем называть уравнение (9) *уравнением гипергеометрического типа*, а его решения — *функциями гипергеометрического* *типа.* В соответствии с этим уравнение (1) естественно назвать *обобщенным уравнением гипергеометрического типа* *).

Для определения полинома $\pi(z)$ и постоянной λ перепишем условие (8) в виде

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

где

$$k = \lambda - \pi'(z). \qquad (10)$$

Если считать постоянную k известной, то в результате решения квадратного уравнения для $\pi(z)$ получим

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \qquad (11)$$

Так как $\pi(z)$ — полином, то подкоренное выражение должно представляться в виде квадрата некоторого полинома. Это возможно лишь в случае, когда дискриминант полинома второй степени, стоящего под корнем, равен нулю. Из этого условия получаем уравнение для постоянной k, вообще говоря, квадратное.

После определения k находим $\pi(z)$ по формуле (11), а затем $\varphi(z)$, $\tau(z)$, λ с помощью (3), (6), (10). Очевидно, что сведение уравнения (1) к уравнению (9) может быть осуществлено несколькими способами в соответствии с выбором различных значений постоянной k и выбором различных знаков в формуле (11) для $\pi(z)$.

Рассмотренное преобразование позволяет вместо изучения исходного уравнения (1) ограничиться изучением более простого уравнения (9).

Пример. Приведем к виду (9) уравнение Бесселя

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0$$

с помощью замены $u = \varphi(z)y$. Уравнение Бесселя является частным случаем уравнения (1) при $\sigma(z) = z$, $\tilde{\tau}(z) = 1$, $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2$. Подкоренное выражение в (11) в данном случае имеет вид $-z^2 + \nu^2 + kz$. Приравнивая дискриминант этого квадратного трехчлена нулю, приходим к следующему уравнению для постоянной k:

$$k^2 + 4\nu^2 = 0.$$

*) Если $\sigma(z)$ — полином второй степени, то уравнение (1) является частным случаем уравнения Римана с тремя различными особыми точками, когда одна из особых точек лежит на бесконечности. Уравнение Римана изучается в курсах по аналитической теории дифференциальных уравнений (см. [18, 19], а также книги: Голубев В. В. Лекции по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.— Л.: Гостехиздат, 1941; Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939).

Отсюда $k=\pm 2i\nu$ и, следовательно, по формуле (11)

$$\pi(z)=\pm\sqrt{-z^2+\nu^2\pm 2i\nu z}=\pm(iz\pm\nu).$$

Таким образом, в данном случае существуют четыре возможных вида полинома $\pi(z)$. Рассмотрим, например, случай, когда $k=2i\nu$, $\pi(z)=iz+\nu$. С помощью (3), (6), (10) находим

$$\varphi(z)=z^{\nu}e^{iz},$$

$$\tau(z)=2iz+2\nu+1,\quad \lambda=k+\pi'(z)=i(2\nu+1).$$

В результате уравнение (9) примет вид

$$zy''+(2iz+2\nu+1)y'+i(2\nu+1)y=0.$$

Замечания. 1. Так как уравнение (1) не меняется при замене $\sigma(z)$, $\tilde{\tau}(z)$, $\tilde{\sigma}(z)$ на $c\sigma(z)$, $c\tilde{\tau}(z)$, $c^2\tilde{\sigma}(z)$ (c — произвольная постоянная), то коэффициент при старшей степени полинома $\sigma(z)$ можно считать равным заданному числу. Аналогичное замечание справедливо и для (9).

2. В дальнейшем можно ограничиться рассмотрением случаев, когда в уравнениях (1) и (9) полином $\sigma(z)$ не имеет кратных корней. Действительно, если $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z)=(z-a)^2$, то (1) с помощью замены $z-a=1/s$ преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{2-s\tilde{\tau}(a+1/s)}{s}\frac{du}{ds}+\frac{s^2\tilde{\sigma}(a+1/s)}{s^2}u=0. \qquad (12)$$

Выражения $s\tilde{\tau}(a+1/s)$ и $s^2\tilde{\sigma}(a+1/s)$ являются полиномами относительно переменной s соответственно не выше первой и второй степени. Поэтому (12) является уравнением вида (1), для которого полином $\sigma(s)$ равен s и, следовательно, не имеет кратных корней.

3. Уравнение (1) невозможно привести к виду (9), если $\sigma(z)=1$, а $(\tilde{\tau}/2)^2-\tilde{\sigma}$ — полином первой степени. В этом случае для приведения уравнения (1) к удобному для исследования виду можно выбрать в (3) полином $\pi(z)$ из условия равенства нулю функции $\tau(z)$. При этом $\bar{\sigma}(z)$ будет полиномом первой степени и уравнение (5) примет вид

$$y''+(az+b)y=0. \qquad (13)$$

Уравнение (13) линейной заменой $s=az+b$ сводится к частному случаю уравнения

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1-2\alpha}{s}\frac{dy}{ds}+\left[(\beta\gamma s^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{s^2}\right]y=0, \qquad (14)$$

где α, β, γ, ν — постоянные. Это уравнение будет рассмотрено в § 14 (см. уравнение Ломмеля). Решения уравнения (14) выражаются через цилиндрические функции.

4. К решению уравнений гипергеометрического типа можно свести решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z)\, u_1 + a_{12}(z)\, u_2, \\ u_2' &= a_{21}(z)\, u_1 + a_{22}(z)\, u_2 \end{aligned} \tag{15}$$

в случае, когда коэффициенты $a_{ik}(z)$ имеют вид

$$a_{ik}(z) = \tau_{ik}(z)/\sigma(z), \tag{16}$$

где $\tau_{ik}(z)$ — полиномы не выше первой степени, $\sigma(z)$ — полином не выше второй степени. Если из (15) исключить $u_2(z)$, то приходим к уравнению для $u_1(z)$:

$$u_1'' - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a_{12}'}{a_{12}}\right) u_1' + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}\frac{a_{12}'}{a_{12}} - a_{11}'\right) u_1 = 0. \tag{17}$$

Поскольку

$$a_{12}'/a_{12} = -\sigma'/\sigma + \tau_{12}'/\tau_{12},$$

то (17) при $\tau_{12}' = 0$ будет уравнением гипергеометрического типа. Если $\tau_{12}' \neq 0$, то можно предварительно воспользоваться линейным преобразованием

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

где α, β, γ, δ — постоянные. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \tilde{a}_{11}(z)\, v_1 + \tilde{a}_{21}(z)\, v_2, \\ v_2' &= \tilde{a}_{21}(z)\, v_1 + \tilde{a}_{22}(z)\, v_2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\tilde{a}_{ik}(z)$ — линейные комбинации функций $a_{ik}(z)$ с постоянными коэффициентами, зависящими от α, β, γ, δ. Они имеют вид

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \tilde{\tau}_{ik}(z)/\sigma(z),$$

где $\tilde{\tau}_{ik}(z)$ — полином не выше первой степени. Если выбрать коэффициенты α, β, γ, δ из условия $\tilde{\tau}_{12}' = 0$ (что всегда возможно), то для функции $v_1(z)$ после исключения $v_2(z)$ из системы (18) получим обобщенное уравнение гипергеометрического типа.

В том случае, когда $\sigma(z)$ — полином первой степени, от системы (15) можно перейти к обобщенному уравнению гипергеометрического типа другим способом, выбирая постоянные α, β, γ, δ так, чтобы коэффициент $\tilde{a}_{12}$ не зависел от z, т. е. из условия $\tilde{\tau}_{12} = \nu\sigma(z)$ (ν — постоянная).

§ 2. Полиномы гипергеометрического типа

Приступим к изучению свойств решений уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Покажем, что *производные любого порядка от функций гипергеометрического типа также являются функциями гипергеометрического типа.*

Для доказательства продифференцируем уравнение (1). В результате получим, что функция $v_1(z) = y'(z)$ удовлетворяет