4. К решению уравнений гипергеометрического типа можно свести решение системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(z)\, u_1 + a_{12}(z)\, u_2, \\ u_2' &= a_{21}(z)\, u_1 + a_{22}(z)\, u_2 \end{aligned} \tag{15}$$

в случае, когда коэффициенты $a_{ik}(z)$ имеют вид

$$a_{ik}(z) = \tau_{ik}(z)/\sigma(z), \tag{16}$$

где $\tau_{ik}(z)$ — полиномы не выше первой степени, $\sigma(z)$ — полином не выше второй степени. Если из (15) исключить $u_2(z)$, то приходим к уравнению для $u_1(z)$:

$$u_1'' - \left(a_{11} + a_{22} + \frac{a_{12}'}{a_{12}}\right) u_1' + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}\frac{a_{12}'}{a_{12}} - a_{11}'\right) u_1 = 0. \tag{17}$$

Поскольку

$$a_{12}'/a_{12} = -\sigma'/\sigma + \tau_{12}'/\tau_{12},$$

то (17) при $\tau_{12}' = 0$ будет уравнением гипергеометрического типа. Если $\tau_{12}' \neq 0$, то можно предварительно воспользоваться линейным преобразованием

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2,$$

где α, β, γ, δ — постоянные. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \tilde a_{11}(z)\, v_1 + \tilde a_{21}(z)\, v_2, \\ v_2' &= \tilde a_{21}(z)\, v_1 + \tilde a_{22}(z)\, v_2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\tilde a_{ik}(z)$ — линейные комбинации функций $a_{ik}(z)$ с постоянными коэффициентами, зависящими от α, β, γ, δ. Они имеют вид

$$\tilde a_{ik}(z) = \tilde\tau_{ik}(z)/\sigma(z),$$

где $\tilde\tau_{ik}(z)$ — полином не выше первой степени. Если выбрать коэффициенты α, β, γ, δ из условия $\tilde\tau_{12}' = 0$ (что всегда возможно), то для функции $v_1(z)$ после исключения $v_2(z)$ из системы (18) получим обобщенное уравнение гипергеометрического типа.

В том случае, когда $\sigma(z)$ — полином первой степени, от системы (15) можно перейти к обобщенному уравнению гипергеометрического типа другим способом, выбирая постоянные α, β, γ, δ так, чтобы коэффициент $\tilde a_{12}$ не зависел от z, т. е. из условия $\tilde\tau_{12} = \nu\sigma(z)$ (ν — постоянная).

§ 2. Полиномы гипергеометрического типа

Приступим к изучению свойств решений уравнения гипергеометрического типа

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Покажем, что *производные любого порядка от функций гипергеометрического типа также являются функциями гипергеометрического типа.*

Для доказательства продифференцируем уравнение (1). В результате получим, что функция $v_1(z) = y'(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma(z)v_1''+\tau_1(z)v_1'+\mu_1 v_1=0, \tag{2}$$

где

$$\tau_1(z)=\tau(z)+\sigma'(z), \quad \mu_1=\lambda+\tau'(z).$$

Так как $\tau_1(z)$ — полином не выше первой степени, а μ_1 не зависит от z, то (2) является уравнением гипергеометрического типа.

Справедливо и обратное утверждение: *любое решение уравнения* (2) *при* $\lambda\neq 0$ *является производной некоторого решения уравнения* (1).

Действительно, пусть $v_1(z)$ — решение уравнения (2). Если бы функция $v_1(z)$ являлась производной некоторого решения $y(z)$ уравнения (1), то эти функции были бы связаны следующим образом (см. (1)):

$$y(z)=-\frac{1}{\lambda}\left[\sigma(z)v_1'+\tau(z)v_1\right].$$

Покажем, что функция $y(z)$, полученная по этой формуле, удовлетворяет уравнению (1), а производная этой функции совпадает с $v_1(z)$. Имеем

$$\lambda y'=-\left[\sigma(z)v_1''+\tau_1(z)v_1'+\tau'(z)v_1\right]=\lambda v_1,$$

т. е. действительно $y'=v_1(z)$. Подставляя $v_1=y'$ в исходное выражение для $y(z)$, приходим к уравнению (1) для $y(z)$.

Подобным же образом для функции $v_n(z)=y^{(n)}(z)$ можно по индукции получить уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(z)v_n''+\tau_n(z)v_n'+\mu_n v_n=0, \tag{3}$$

где

$$\tau_n(z)=\tau(z)+n\sigma'(z), \quad \mu_n=\lambda+n\tau'+\frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

При этом любое решение уравнения (3) при $\mu_k\neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ можно представить в виде $v_n(z)=y^{(n)}(z)$, где $y(z)$ — некоторое решение уравнения (1).

Рассмотренное свойство позволяет построить семейство частных решений уравнения (1), соответствующих определенным значениям λ. Действительно, уравнение (3) при $\mu_n=0$ имеет частное решение $v_n(z)=\text{const}$. Так как $v_n(z)=y^{(n)}(z)$, то это означает, что при

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

существует частное решение уравнения гипергеометрического типа $y(z)=y_n(z)$, являющееся полиномом степени n. Такие решения будем называть *полиномами гипергеометрического типа*. Полиномы $y_n(z)$ являются в известном смысле простейшими решениями уравнения (1) *).

*) Впрочем, существование полиномиального решения уравнения (1) вытекает из того факта, что оператор $\sigma(z)d^2/dz^2+\tau(z)d/dz$ переводит любой полином степени n в полином той же степени.

Чтобы получить явное выражение для полинома $y_n(z)$, умножим уравнения (1), (3) на такие функции $\rho(z)$, $\rho_n(z)$, которые позволят записать эти уравнения в самосопряженном виде:

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \tag{4}$$

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0. \tag{5}$$

Здесь функции $\rho(z)$, $\rho_n(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho, \tag{6}$$

$$(\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n. \tag{7}$$

Используя явное выражение для $\tau_n(z)$, нетрудно установить связь функций $\rho_n(z)$ и $\rho_0(z) \equiv \rho(z)$. Имеем

$$(\sigma\rho_n)'/\rho_n = \tau + n\sigma' = (\sigma\rho)'/\rho + n\sigma',$$

откуда

$$\rho_n'/\rho_n = \rho'/\rho + n\sigma'/\sigma$$

и, следовательно,

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z)\rho(z), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Перейдем теперь к получению явного выражения для полиномов гипергеометрического типа. Так как $\sigma\rho_m = \rho_{m+1}$, $v_m'(z) = v_{m+1}(z)$, то (5) можно переписать в виде

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}v_{m+1})'.$$

Отсюда при $m < n$ последовательно получаем

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}v_{m+1})' =$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)(\rho_{m+} v_{m+2})'' = \ldots = \frac{A_m}{A_n}(\rho_n v_n)^{(n-m)},$$

где

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \tag{9}$$

Если функция $y(z)$ является полиномом степени n, т. е. $y = y_n(z)$, то

$$v_n(z) = y_n^{(n)}(z) = \text{const},$$

и мы получаем следующее выражение для $y_n^{(m)}(z)$:

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\rho_m(z)}[\rho_n(z)]^{(n-m)}, \tag{10}$$

где

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}, \quad B_n = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(z). \tag{11}$$

Отсюда, в частности, при $m=0$ вытекает явное выражение для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]^{(n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (1) определяются формулой (12) однозначно с точностью до нормировочного множителя. Эти решения соответствуют значениям $\mu_n = 0$, т. е.

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

Будем называть соотношение (12) *формулой Родрига*, так как оно было выведено Б. О. Родригом в 1814 г. для частного случая полиномов гипергеометрического типа — полиномов Лежандра, для которых $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = 1$.

§ 3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа

Найдем теперь с помощью обобщения формулы Родрига частные решения уравнения гипергеометрического типа (2.1)*) при произвольных значениях λ. Для этого предварительно запишем равенство (2.12) для полиномиальных решений уравнения (2.1) в другом виде, используя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции:

$$y_n(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds. \tag{1}$$

Здесь $C_n = B_n n!/(2\pi i)$, C — замкнутый контур, охватывающий точку $s = z$, а функция $\rho(z)$ является решением уравнения $(\sigma\rho)' = \tau\rho$.

Представление частного решения уравнения (2.1) при $\lambda = \lambda_n$ в виде (1) дает возможность предположить, что при произвольном значении λ частное решение этого уравнения можно искать в виде

$$y(z) = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds, \tag{2}$$

где C_ν — нормировочная постоянная, а величина ν связана с постоянной λ сооотношением, аналогичным (2.13):

$$\lambda = -\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''. \tag{3}$$

Покажем, что при определенном выборе контура C, который будем считать, вообще говоря, незамкнутым, это предположение оказывается справедливым.

---

*) При ссылках на формулу из другого параграфа в качестве первой цифры указывается его номер.