Отсюда, в частности, при $m=0$ вытекает явное выражение для полиномов гипергеометрического типа:

$$y_n(z)=\frac{B_n}{\rho(z)}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]^{(n)}, \quad n=0,1,\ldots \tag{12}$$

Таким образом, полиномиальные решения уравнения (1) определяются формулой (12) однозначно с точностью до нормировочного множителя. Эти решения соответствуют значениям $\mu_n=0$, т. е.

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad n=0,1,\ldots \tag{13}$$

Будем называть соотношение (12) *формулой Родрига*, так как оно было выведено Б. О. Родригом в 1814 г. для частного случая полиномов гипергеометрического типа — полиномов Лежандра, для которых $\sigma(z)=1-z^2$, $\rho(z)=1$.

§ 3. Интегральное представление для функций гипергеометрического типа

Найдем теперь с помощью обобщения формулы Родрига частные решения уравнения гипергеометрического типа (2.1)*) при произвольных значениях λ. Для этого предварительно запишем равенство (2.12) для полиномиальных решений уравнения (2.1) в другом виде, используя интегральную формулу Коши для производных аналитической функции:

$$y_n(z)=\frac{C_n}{\rho(z)}\int_C\frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}ds. \tag{1}$$

Здесь $C_n=B_n n!/(2\pi i)$, C — замкнутый контур, охватывающий точку $s=z$, а функция $\rho(z)$ является решением уравнения $(\sigma\rho)'=\tau\rho$.

Представление частного решения уравнения (2.1) при $\lambda=\lambda_n$ в виде (1) дает возможность предположить, что при произвольном значении λ частное решение этого уравнения можно искать в виде

$$y(z)=y_\nu(z)=\frac{C_\nu}{\rho(z)}\int_C\frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}ds, \tag{2}$$

где C_ν — нормировочная постоянная, а величина ν связана с постоянной λ сооотношением, аналогичным (2.13):

$$\lambda=-\nu\tau'-\frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''. \tag{3}$$

Покажем, что при определенном выборе контура C, который будем считать, вообще говоря, незамкнутым, это предположение оказывается справедливым.

---

*) При ссылках на формулу из другого параграфа в качестве первой цифры указывается его номер.

Теорема 1. *Пусть функция* $\rho(z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

ν — *корень уравнения*

$$\lambda + \nu\tau' + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

и пусть

$$\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s), \quad u(z) = \int\limits_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds.$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет частные решения вида*

$$y(z) \equiv y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} u(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds,$$

где C_ν — *нормировочная постоянная, если:*

1) *при вычислении производных* $u'(z)$, $u''(z)$ *можно менять местами дифференцирование по* z *и интегрирование по* s, *т. е.*

$$u'(z) = (\nu+1)\int\limits_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\,ds,$$

$$u''(z) = (\nu+1)(\nu+2)\int\limits_C \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}\,ds;$$

2) *контур* C *выбран так, что*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} = 0, \qquad (4)$$

где s_1, s_2 — *концы контура* C.

Доказательство. Получим дифференциальное уравнение для функции $u(z)$. Имеем

$$[\sigma(s)\rho_\nu(s)]' = \tau_\nu(s)\rho_\nu(s),$$

где $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$ (ср. с (2.7)). Проинтегрируем обе части уравнения по контуру C, предварительно умножив его на $1/(s-z)^{\nu+2}$, и затем воспользуемся интегрированием по частям:

$$\left.\frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s_1}^{s_2} + (\nu+2)\int\limits_C \frac{\sigma(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+3}}\,ds = \int\limits_C \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\,ds.$$

По условию (4) подстановка равна нулю. Разложим полиномы $\sigma(s)$, $\tau_\nu(s)$ по степеням $s-z$:

$$\sigma(s) = \sigma(z) + \sigma'(z)(s-z) + \frac{1}{2}\sigma''(z)(s-z)^2,$$

$$\tau_\nu(s) = \tau_\nu(z) + \tau_\nu'(z)(s-z).$$

Принимая во внимание формулы для $u(z)$, $u'(z)$, $u''(z)$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{\nu+1}\sigma(z)u'' + \frac{\nu+2}{\nu+1}\sigma'(z)u' + \frac{\nu+2}{2}\sigma'' u = \frac{1}{\nu+1}\tau_\nu(z)u' + \tau_\nu' u.$$

После подстановки явного выражения для $\tau_\nu(z)$ это уравнение можно записать в виде

$$\sigma(z)u'' + [2\sigma'(z) - \tau(z)]u' - (\nu+1)\left(\tau' + \frac{\nu-2}{2}\sigma''\right)u = 0. \tag{5}$$

Получим теперь с помощью (5) уравнение для функции $y_\nu(z)$. Уравнение (5) — обобщенное уравнение гипергеометрического типа при

$$\tilde{\tau}(z) = 2\sigma'(z) - \tau(z), \quad \tilde{\sigma}(z) = -(\nu+1)\left(\tau' + \frac{\nu-2}{2}\sigma''\right)\sigma(z).$$

Так как

$$u(z) = \frac{1}{C_\nu}\rho(z)y_\nu(z), \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\tau-\sigma'}{\sigma},$$

то можно воспользоваться преобразованием из § 1, полагая

$$\varphi(z) = \frac{1}{C_\nu}\rho(z), \quad \pi(z) = \tau(z) - \sigma'(z).$$

В результате для функции $y_\nu(z)$ получаем (см. (1.5)) уравнение

$$y_\nu'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y_\nu' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y_\nu = 0,$$

где

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) =$$

$$= \left[-\nu\tau' - \frac{\nu(\nu-1)}{2}\sigma''\right]\sigma(z) = \lambda\sigma(z).$$

Полученное уравнение, очевидно, совпадает с уравнением (2.1).

Доказанная теорема будет иметь фундаментальное значение для изучения конкретных специальных функций.

Заметим, что условию (4) теоремы можно удовлетворить, в частности, если выбрать концы контура C таким образом, чтобы функция $\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)/(s-z)^{\nu+2}$ равнялась нулю на концах контура C, т. е.

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\right|_{s=s_1,s_2} = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим некоторые возможные виды контуров C, для которых выполнено условие (6).

а) Пусть s_0 — корень уравнения $\sigma(s)=0$. Если $\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)\big|_{s=s_0} = 0$, то в качестве одного из концов контура можно выбрать $s = s_0$.

б) Если $\operatorname{Re}(\nu+2)<0$, то в качестве одного из концов контура можно взять точку $s=z$.

в) В качестве конца контура можно выбрать также значение $s=\infty$, если

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}}=0.$$

Таким способом можно построить несколько частных решений уравнения (2.1), соответствующих различным видам контура C и различным значениям ν. Кроме того, число частных решений можно увеличить, если воспользоваться преобразованием, рассмотренным в § 1. Действительно, (2.1) можно рассматривать как обобщенное уравнение гипергеометрического типа, для которого $\tilde{\sigma}(z)=\lambda\sigma(z)$, $\tilde{\tau}(z)=\tau(z)$. В результате преобразования исходное уравнение переходит в другие уравнения гипергеометрического типа. Построив для последних частные решения, получим с помощью обратного преобразования новые частные решения для исходного уравнения. Так как уравнение (2.1) имеет лишь два линейно независимых решения, то любое его решение должно являться линейной комбинацией двух линейно независимых решений. Таким способом можно получить, в частности, функциональные соотношения для функций гипергеометрического типа.

При построении решений уравнения (2.1) будем ограничиваться контурами простого вида — прямыми линиями или отрезками прямых линий, соединяющими точки s_1 и s_2, для которых выполнено условие (6). Контуры такого вида можно выбрать, вообще говоря, лишь при некоторых ограничениях, наложенных на коэффициенты дифференциального уравнения гипергеометрического типа. Распространение результатов, полученных при таких ограничениях, на более общие случаи может быть произведено с помощью аналитического продолжения построенных решений.

Напомним определение аналитического продолжения, которое будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях*). Пусть функция $f(z)$ задана на множестве E, принадлежащем области D. Если функция $F(z)$ является аналитической в области D и совпадает с $f(z)$ на множестве E, то функцию $F(z)$ называют *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ на область D.

Принцип аналитического продолжения. *Если множество E содержит хотя бы одну предельную точку, принадлежащую области D, то функция $f(z)$ имеет не больше одного аналитического продолжения на область D.*

В частности, аналитическое продолжение будет единственным, если множество E является отрезком, лежащим в D.

Здесь и в дальнейшем под аналитической функцией будем подразумевать однозначную аналитическую функцию. В связи

---

*) Изложение этих вопросов можно найти в [8, 13, 15].

с этим, если при рассмотрении какой-либо функции возникает неоднозначность, будем проводить разрезы по некоторым линиям в комплексной плоскости, которые обеспечат выбор определенной ветви многозначной аналитической функции.

При вычислении выражений вида $(z-a)^\alpha$ возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по модулю значением аргумента, совместимым с данным разрезом. Например, для выбора определенной ветви функции $(1-z)^\alpha(1+z)^\beta$, имеющей точки ветвления при $z=-1$ и $z=+1$, достаточно сделать разрез вдоль действительной оси при $z \geqslant -1$. В соответствии с этим разрезом функция $(1-z)^\alpha$ вычисляется при $|\arg(1-z)| < \pi$, а функция $(1+z)^\beta$ при $0 < \arg z < 2\pi$.

Так как в качестве решений уравнения (2.1) мы будем использовать интегральное представление (2), то для аналитического продолжения решений этого уравнения по независимой переменной и параметрам, входящим в уравнение, удобно опираться на следующую теорему об аналитичности интеграла, зависящего от параметра *).

Теорема 2. *Пусть C — конечная кусочно гладкая кривая в плоскости комплексной переменной s, D — область в комплексной плоскости z. Если функция $f(z, s)$ непрерывна по совокупности переменных при $s \in C$, $z \in D$ и при любом $s \in C$ аналитична по z в области D, то функция*

$$F(z) = \int_C f(z, s)\, ds$$

аналитична в области D и

$$F'(z) = \int_C f'_z(z, s)\, ds.$$

Утверждение теоремы остается в силе и для равномерно сходящихся несобственных интегралов $F(z)$. При исследовании интегральных представлений для различных специальных функций удобно использовать следующий простой признак равномерной сходимости интегралов: *если при всех $s \in C$, $z \in D$ непрерывная функция $f(z, s)$ удовлетворяет неравенству $|f(z, s)| \leqslant \varphi(s)$ и интеграл $\int_C \varphi(s)|ds|$ сходится, то интеграл $\int_C f(z, s)\, ds$ равномерно сходится по z в области D.*

Так как производные функций гипергеометрического типа $y=y(z)$ являются в свою очередь функциями того же типа, то в результате их аналитического продолжения получаем аналитическое продолжение функций $y'(z)$ и $y''(z)$ по переменной z и по параметрам, от которых зависят эти функции. Интегральное представление для функции $y(z)$ было построено из условия, что-

---

*) Доказательство этой теоремы можно найти в [8, 13, 15].

бы эта функция удовлетворяла уравнению (2.1) при некоторых ограничениях на переменную z и параметры, от которых зависит эта функция. По принципу аналитического продолжения функция $y(z)$ будет удовлетворять этому уравнению во всей области, в которой левая часть уравнения является аналитической функцией (правая часть, равная нулю, аналитична в любой области) *).

В последующем изложении для изучения решений конкретных уравнений гипергеометрического типа будет использоваться интегральное представление (2), а полученные результаты будут распространены на более широкую область с помощью принципа аналитического продолжения.

§ 4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования

Рассмотрим общий метод получения различных соотношений для функций $y_\nu(z)$, заданных интегральным представлением (3.2). Предварительно установим связь между функциями вида

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}\,ds,$$

которые входят в определение функций $y_\nu(z)$ и их производных.

Лемма. *Между любыми тремя функциями* $\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$ *существуют линейные соотношения*

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\,\varphi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, *если разности* $\nu_i-\nu_j$ *и* $\mu_i-\mu_j$ *являются целыми числами и выполнено условие*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}}\,s^m\right|_{s_1}^{s_2} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

где s_1, s_2 *— концы контура* C, ν_0 *— то из значений* ν_i, *которое имеет наименьшую вещественную часть,* μ_0 *— то из значений* μ_i, *которое имеет наибольшую вещественную часть.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $\sum\limits_{i=1}^{3} A_i\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$. Покажем, что можно выбрать коэффициенты $A_i = A_i(z)$ таким образом, чтобы рассматриваемая комбинация была равна нулю.

---

*) Впрочем, если использовать аналитическую теорию дифференциальных уравнений (см., например, [18]), то область аналитичности решений уравнения (2.1) можно было бы определить, исходя непосредственно из вида дифференциального уравнения (особыми точками уравнения (2.1) являются корни уравнения $\sigma(z) = 0$ и бесконечно удаленная точка).