бы эта функция удовлетворяла уравнению (2.1) при некоторых ограничениях на переменную z и параметры, от которых зависит эта функция. По принципу аналитического продолжения функция $y(z)$ будет удовлетворять этому уравнению во всей области, в которой левая часть уравнения является аналитической функцией (правая часть, равная нулю, аналитична в любой области) *).

В последующем изложении для изучения решений конкретных уравнений гипергеометрического типа будет использоваться интегральное представление (2), а полученные результаты будут распространены на более широкую область с помощью принципа аналитического продолжения.

§ 4. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования

Рассмотрим общий метод получения различных соотношений для функций $y_\nu(z)$, заданных интегральным представлением (3.2). Предварительно установим связь между функциями вида

$$\varphi_{\nu\mu}(z) = \int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}\,ds,$$

которые входят в определение функций $y_\nu(z)$ и их производных.

Лемма. *Между любыми тремя функциями* $\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$ *существуют линейные соотношения*

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\,\varphi_{\nu_i\mu_i}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, *если разности* $\nu_i - \nu_j$ *и* $\mu_i - \mu_j$ *являются целыми числами и выполнено условие*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}}\,s^m\right|_{s_1}^{s_2} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

где s_1, s_2 — *концы контура* C, ν_0 — *то из значений* ν_i, *которое имеет наименьшую вещественную часть,* μ_0 — *то из значений* μ_i, *которое имеет наибольшую вещественную часть.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $\sum\limits_{i=1}^{3} A_i\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$. Покажем, что можно выбрать коэффициенты $A_i = A_i(z)$ таким образом, чтобы рассматриваемая комбинация была равна нулю.

---

*) Впрочем, если использовать аналитическую теорию дифференциальных уравнений (см., например, [18]), то область аналитичности решений уравнения (2.1) можно было бы определить, исходя непосредственно из вида дифференциального уравнения (особыми точками уравнения (2.1) являются корни уравнения $\sigma(z) = 0$ и бесконечно удаленная точка).

При любом фиксированном значении z имеем

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = \int_C \frac{\sigma^{\nu_0}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s)\, ds,$$

где

$$P(s) = \sum_i A_i \sigma^{\nu_i - \nu_0}(s)(s-z)^{\mu_0 - \mu_i}.$$

Так как разности $\nu_i - \nu_0$, $\mu_0 - \mu_i$ — целые неотрицательные числа, то функция $P(s)$ будет полиномом относительно переменной s. Подберем коэффициенты A_i так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\sigma^{\nu_0}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}} P(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\right], \tag{1}$$

где $Q(s)$ — полином (ниже будет показано, что такой выбор коэффициентов, как правило, возможен). В результате получим

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = \left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} Q(s)\right|_{s_1}^{s_2}.$$

Так как на концах контура C выполняется условие

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}} s^m\right|_{s_1}^{s_2} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

то подстановка обращается в нуль и при подобранных таким способом коэффициентах A_i будет иметь место линейное соотношение

$$\sum_i A_i \varphi_{\nu_i \mu_i}(z) = 0. \tag{2}$$

Покажем, что можно так подобрать коэффициенты полинома $Q(s)$ и коэффициенты A_i, чтобы равенство (1) действительно имело место. Для этого перепишем (1) в более удобном виде, используя для функции $\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s)$ дифференциальное уравнение $(\sigma\rho_\nu)' = \tau_\nu \rho_\nu$, где $\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma'(s)$. В результате получим

$$P(s) = Q(s)\left[(s-z)\tau_{\nu_0}(s) - \mu_0\sigma(s)\right] + \sigma(s)(s-z)Q'(s). \tag{3}$$

Если сравнить левую и правую части этого равенства, то нетрудно убедиться в том, что степень полинома $Q(s)$ на две единицы меньше степени полинома $P(s)$.

Приравнивая коэффициенты при различных степенях s в левой и правой частях (3), получим систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $Q(s)$ и коэффициентов A_i ($i = 1, 2, 3$), входящих в выражение для $P(s)$. Число уравнений на две единицы превышает число неизвестных коэффициентов полинома $Q(s)$. Поэтому число неизвестных величин будет на единицу больше числа уравнений и, следовательно, один из неизвестных нам коэффициентов можно выбрать равным некоторой постоянной. В том случае, когда $P(s)$ — полином не выше первой степени, рассмотренные соображения останутся справедливыми, если положить $Q(s)=0$. Так как в полученной системе уравнений коэффициенты при неизвестных являются полиномами от переменной z, то при таком выборе одного из коэффициентов остальные будут рациональными функциями переменной z. После умножения равенства (2) на общий знаменатель коэффициентов $A_i(z)$ приходим к линейному соотношению с полиномиальными коэффициентами. Лемма доказана.

При практическом осуществлении рассмотренного приема для понижения степени полинома $P(s)$ иногда удобно воспользоваться интегрированием по частям для некоторых функций $\varphi_{\nu_i\mu_i}(z)$. Имеем

$$\varphi_{\mu\nu}(z)=\int_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu+1}}\,ds=$$

$$=-\frac{1}{\mu}\frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu}\Bigg|_{s_1}^{s_2}+\frac{1}{\mu}\int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu}\,ds,$$

где $\tau_{\nu-1}(s)=\tau(s)+(\nu-1)\sigma'(s)$. Предполагая, как обычно, что подстановка равна нулю, получим

$$\varphi_{\nu\mu}(z)=\frac{1}{\mu}\int_C \frac{\tau_{\nu-1}(s)\sigma^{\nu-1}(s)\rho(s)}{(s-z)^\mu}\,ds. \tag{4}$$

Пример 1. Найдем связь функций $\varphi_{\nu,\nu-1}(z)$, $\varphi_{\nu\nu}(z)$ и $\varphi_{\nu,\nu+1}(z)$. В данном случае $\nu_0=\nu$, $\mu_0=\nu+1$, $P(s)=A_1(s-z)^2+A_2(s-z)+A_3$, $Q(s)=q_0$ (q_0 — постоянная). Условие на концах контура

$$\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0}}Q(s)\Bigg|_{s_1}^{s_2}=0,$$

возникшее в процессе доказательства леммы, в данном случае равносильно условию

$$\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\Bigg|_{s_1}^{s_2}=0.$$

Равенство (3) имеет вид

$$A_1(s-z)^2+A_2(s-z)+A_3=q_0[(s-z)\tau_\nu(s)-(\nu+1)\sigma(s)].$$

Если положить $q_0=1$ и разложить правую часть этого равенства по степеням $s-z$, то после приравнивания коэффициентов при различных степенях $s-z$ получим

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \tau_\nu' - \frac{\nu+1}{2}\sigma'' = \tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma'',\\
A_2 &= \tau_\nu(z) - (\nu+1)\sigma'(z) = \tau(z) - \sigma'(z),\\
A_3 &= -(\nu+1)\sigma(z).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Таким образом,

$$A_1(z)\varphi_{\nu,\,\nu-1}(z) + A_2(z)\varphi_{\nu\nu}(z) + A_3(z)\varphi_{\nu,\,\nu+1}(z) = 0, \tag{6}$$

где коэффициенты $A_i(z)$ определяются формулами (5).

Полученное соотношение удобно переписать в другом виде. Так как, согласно теореме 1 из § 3, частное решение уравнения гипергеометрического типа имеет вид

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\varphi_{\nu\nu}(z)$$

и, кроме того,

$$\varphi_{\nu,\nu+1}(z) = \frac{1}{\nu+1}\varphi_{\nu\nu}'(z), \quad [\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z),$$

то соотношение (6) дает удобное интегральное представление для производных функций гипергеометрического типа $y_\nu(z)$:

$$y_\nu'(z) = \frac{C_\nu^{(1)}}{\sigma(z)\rho(z)}\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^\nu}\,ds, \tag{7}$$

где

$$C_\nu^{(1)} = \left(\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''\right)C_\nu.$$

Обобщение полученного в этом примере соотношения (7) позволяет вывести удобное интегральное представление для производных любого порядка функций гипергеометрического типа. Действительно, соотношение (7) можно интерпретировать следующим образом: интегральное представление для первой производной функции гипергеометрического типа

$$y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\int\limits_C \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds = \frac{C_\nu}{\rho(z)}\varphi_{\nu\nu}(z) \tag{8}$$

можно получить из исходного интегрального представления заменой ν на $\nu-1$, $\rho(z)$ на $\rho_1(z) = \sigma(z)\rho(z)$ и умножением на дополнительный множитель $\tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''$. Отсюда ясно, что

$$y_\nu^{(k)}(z) = \frac{C_\nu^{(k)}}{\sigma^k(z)\rho(z)}\varphi_{\nu,\nu-k}(z), \tag{9}$$

где

$$C_\nu^{(k)} = \left(\tau'_{k-1} + \frac{\nu-k}{2}\sigma''\right) C_\nu^{(k-1)} =$$

$$= \left(\tau' + \frac{\nu+k-2}{2}\sigma''\right) C_\nu^{(k-1)} = \prod_{s=0}^{k-1}\left(\tau' + \frac{\nu+s-1}{2}\sigma''\right) C_\nu.$$

Если воспользоваться интегральными представлениями (9) и доказанной выше леммой, то приходим к следующей теореме.

Теорема. *Между любыми тремя функциями* $y_{\nu_i}^{(k_i)}(z)$ *существует линейное соотношение вида*

$$\sum_{i=1}^{3} A_i(z)\, y_{\nu_i}^{(k_i)}(z) = 0$$

с полиномиальными коэффициентами $A_i(z)$, *если разности* $\nu_i - \nu_j$ *являются целыми числами и выполнено условие*

$$\left.\frac{\sigma^{\nu_0+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\mu_0+1}}\, s^m\right|_{s_1}^{s_2} = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Здесь s_1, s_2 — *концы контура* C, ν_0 — *то из значений* ν_i, *которое имеет наименьшую вещественную часть*, μ_0 — *то из значений* ν_i, *которое имееет наибольшую вещественную часть.*

Заметим, что уравнения, определяющие коэффициенты $A_i(z)$, линейны и однородны относительно неизвестных коэффициентов и не зависят от способа выбора контура C для функций $y_\nu(z)$. Поэтому *две функции гипергеометрического типа* $y_\nu(z)$, *которые отличаются друг от друга лишь множителем, не зависящим от* ν, *и выбором контура* C, *будут удовлетворять соотношениям рассматриваемого вида с одними и теми же коэффициентами.*

Пример 2. Выведем формулу вида

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3 y_\nu(z) = 0, \tag{10}$$

связывающую функции $y'_\nu(z)$, $y_\nu(z)$ и $y_{\nu+1}(z)$ (в дальнейшем формулы, выражающие производные функций гипергеометрического типа через сами функции, будем называть *формулами дифференцирования*).

Для этого воспользуемся интегральными представлениями (7), (8) для $y'_\nu(z)$, $y_\nu(z)$, а также предварительно преобразуем выражение для $y_{\nu+1}(z)$ с помощью (4). Тогда левую часть (10) можно записать в виде

$$A_1 y'_\nu(z) + A_2 y_{\nu+1}(z) + A_3 y_\nu(z) = \frac{1}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} P(s)\, ds,$$

где

$$P(s) = \left[A_1 \frac{C_\nu \varkappa_\nu}{\sigma(z)}(s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1}\tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu\right],$$

$$\varkappa_\nu = \tau' + \frac{\nu-1}{2}\sigma''.$$

Так как $P(s)$ — полином первой степени относительно s, то $Q(s) = 0$ и, следовательно,

$$A_1 \frac{C_\nu \varkappa_\nu}{\sigma(z)}(s-z) + A_2 \frac{C_{\nu+1}\tau_\nu(s)}{\nu+1} + A_3 C_\nu = 0.$$

Для определения коэффициентов A_1, A_2, A_3 из этого равенства удобно положить $A_1 = \sigma(z)$, разложить левую часть равенства по степеням $s-z$ и приравнять коэффициенты при различных степенях $s-z$. В результате получим

$$A_2 = -(\nu+1)\frac{\varkappa_\nu}{\tau'_\nu}\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}, \quad A_3 = \varkappa_\nu \frac{\tau_\nu(z)}{\tau'_\nu}.$$

Окончательно приходим к следующей формуле дифференцирования:

$$\sigma(z)\, y'_\nu(z) = \frac{\varkappa_\nu}{\tau'_\nu}\left[(\nu+1)\frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}\, y_{\nu+1}(z) - \tau_\nu(z)\, y_\nu(z)\right]. \qquad (11)$$

Таким образом, в гл. I рассмотрен метод построения интегральных представлений для частных решений обобщенного уравнения гипергеометрического типа и указаны способы изучения различных свойств этих решений. На этом мы заканчиваем рассмотрение основ теории специальных функций и в следующей главе переходим к изучению классических ортогональных полиномов — одного из важнейших классов специальных функций математической физики.