ГЛАВА II

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

§ 5. Основные свойства полиномов гипергеометрического типа

1. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. В § 2 были введены полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$, являющиеся решениями уравнения

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

при $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$. Явные выражения для этих полиномов даются *формулой Родрига*

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]^{(n)}, \tag{2}$$

где B_n — нормировочная постоянная, а функция $\rho(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z). \tag{3}$$

Решая это уравнение, получим в зависимости от степени полинома $\sigma(z)$ следующие возможные виды функции $\rho(z)$ (с точностью до постоянного множителя):

$$\rho(z) = \begin{cases} (b-z)^\alpha (z-a)^\beta, & \sigma(z) = (b-z)(z-a), \\ (z-a)^\alpha e^{\beta z}, & \sigma(z) = z-a, \\ e^{\alpha z^2+\beta z}, & \sigma(z) = 1, \end{cases}$$

где a, b, α, β — некоторые постоянные (вообще говоря, комплексные). Линейной заменой независимой переменной выражения для $\sigma(z)$ и $\rho(z)$ можно привести к следующим каноническим видам:

$$\rho(z) = \begin{cases} (1-z)^\alpha (1+z)^\beta, & \sigma(z) = 1-z^2, \\ z^\alpha e^{-z}, & \sigma(z) = z, \\ e^{-z^2}, & \sigma(z) = 1, \end{cases}$$

При такой замене уравнения (1) и (3) перейдут в уравнения того же вида, а соответствующие полиномы гипергеометрического типа $y_n(z)$ останутся полиномами относительно новой переменной и будут по-прежнему определяться формулой Родрига.

В зависимости от вида функции $\sigma(z)$ получим следующие системы полиномов:

1. Пусть $\sigma(z) = 1 - z^2$, $\rho(z) = (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta$. Тогда

$$\tau(z) = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha.$$

Соответствующие полиномы $y_n(z)$ при $B_n = (-1)^n/(2^n n!)$*) называются *полиномами Якоби* и обозначаются $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1 - z)^{-\alpha}(1 + z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1 - z)^{n+\alpha}(1 + z)^{n+\beta}\right].$$

Важными частными случаями полиномов Якоби являются:

а) *полиномы Лежандра* $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$;

б) *полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода*

$$T_n(z) = \cos n\varphi, \quad U_n(z) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(z) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

где $\varphi = \arccos z$. Ниже (см. § 6, п. 2) будет показано, что

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n}P_n^{(-1/2,-1/2)}(z), \quad U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n}P_n^{(1/2,1/2)}(z);$$

в) *полиномы Гегенбауэра*, называемые иногда *ультрасферическими полиномами*,

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n}P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(z).$$

Мы использовали обозначение

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция (см. Дополнение А).

2. Пусть $\sigma(z) = z$, $\rho(z) = z^\alpha e^{-z}$. Тогда

$$\tau(z) = -z + \alpha + 1.$$

Полиномы $y_n(z)$ при $B_n = 1/n!$ называются *полиномами Лагерра* и обозначаются $L_n^\alpha(z)$:

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!}e^z z^{-\alpha}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{\alpha+n}e^{-z}\right).$$

3. Пусть $\sigma(z) = 1$, $\rho(z) = e^{-z^2}$. Тогда $\tau(z) = -2z$. Полиномы $y_n(z)$ при $B_n = (-1)^n$ называются *полиномами Эрмита* и

*) Выбор постоянных B_n сложился исторически и, вообще говоря, произволен. Он соответствует нормировке, принятой в [1].

обозначаются $H_n(z)$:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-z^2}\right).$$

Мы не рассмотрели случай, когда полином $\sigma(z)$ имеет кратные корни, т. е. $\sigma(z) = (z-a)^2$. Полиномы гипергеометрического типа, соответствующие $\sigma(z) = (z-a)^2$, можно выразить через полиномы Лагерра. Как было показано в § 1, при $\sigma(z) = (z-a)^2$ замена $s = 1/(z-a)$ переводит обобщенное уравнение гипергеометрического типа

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u = 0$$

в уравнение того же типа, для которого $\sigma(s) = s$. В частности, уравнение

$$\sigma(z) y'' + \tau(z) y' + \lambda_n y = 0, \qquad \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'',$$

для полиномов гипергеометрического типа при $\sigma(z) = (z-a)^2$ после замены $s = 1/(z-a)$ принимает вид

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{2 - s\tau(a + 1/s)}{s}\frac{dy}{ds} + \frac{\lambda_n}{s^2} y = 0.$$

Как показано в § 1, это уравнение заменой $y = \varphi(s)u$ можно привести к уравнению гипергеометрического типа с помощью надлежащего выбора функции $\varphi(s)$. Одним из возможных видов функции $\varphi(s)$ является $\varphi(s) = 1/s^n$. Так как

$$\tau(z) = \tau(a) + \tau'(z)(z-a),$$

то $\tau(a + 1/s) = \tau(a) + \tau'/s$, и в результате приходим к следующему уравнению для функции $u(s)$:

$$su'' - [s\tau(a) + \tau' + 2(n-1)]u' + n\tau(a)u = 0.$$

Так как $u(s) = s^n y$ и функция y является полиномом степени n относительно переменной $z = a + 1/s$, то функция $u(s)$ будет полиномом степени n относительно переменной s. Таким образом, функция $u(s)$ является полиномом гипергеометрического типа. Так как в данном случае функция $\rho(s)$, определяющая полиномы гипергеометрического типа по формуле Родрига, имеет вид

$$\rho(s) = s^{-\tau' - 2n + 1} e^{-\tau(a)s},$$

то полиномы $u(s) = u_n(s)$ совпадают при $\tau(a) \neq 0$ с точностью до нормировочного множителя с полиномами Лагерра $L_n^{\alpha}(t)$, где $\alpha = -\tau' - 2n + 1$, $t = \tau(a)s$. Поэтому полиномы $y_n(z)$ связаны с полиномами Лагерра следующим образом:

$$y_n(z) = C_n (z-a)^n L_n^{-\tau' - 2n + 1}\left(\frac{\tau(a)}{z-a}\right).$$

Формула остается справедливой и при $\tau(a) = 0$.

Среди полиномов гипергеометрического типа, соответствующих случаю $\sigma(z) = (z-a)^2$, наиболее известными являются *полиномы Бесселя*, для которых

$$\sigma(z) = z^2, \quad \tau(z) = 2(z+1), \quad \rho(z) = e^{-2/z},$$

и формула Родрига имеет вид

$$y_n(z) = 2^{-n} e^{2/z} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{2n} e^{-2/z}\right).$$

Полиномы Бесселя удовлетворяют условию нормировки $y_n(0) = 1$. Для полиномов Бесселя получаем следующую связь с полиномами Лагерра:

$$y_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{2^n} z^n L_n^{-(2n+1)}\left(\frac{2}{z}\right).$$

2. Некоторые следствия из формулы Родрига. Ранее было показано, что производные любого порядка от полиномов гипергеометрического типа $y_n(z)$ также являются полиномами гипергеометрического типа (см. § 2). Формула Родрига для $y_n^{(m)}(z)$ имеет вид

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(z)\rho(z)} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right], \tag{4}$$

где

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn}, \quad A_{0n} = 1, \quad \mu_{kn} = \mu_k(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k.$$

Так как

$$\mu_{kn} = -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right),$$

то

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right). \tag{5}$$

Заметим, что формулу Родрига для $y_n^{(m)}(z)$ можно получить с точностью до нормировочного множителя из формулы Родрига для $y_n(z)$ заменой n на $n-m$, $\rho(z)$ на $\rho_m(z) = \sigma^m(z)\rho(z)$.

Рассмотрим некоторые следствия формулы (4).

1) Из формул Родрига для полиномов $y_n(z)$ и их производных $y_n'(z)$ вытекают следующие *формулы дифференцирования* для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита:

$$\begin{gathered}\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dz} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(z),\\ \frac{dL_n^{\alpha}}{dz} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(z), \quad \frac{dH_n}{dz} = 2nH_{n-1}(z).\end{gathered} \tag{6}$$

2) С помощью формулы Родрига можно выразить производные $y_n'(z)$ через сами полиномы $y_n(z)$. Действительно, так как

$$y_{n+1}(z) = \frac{B_{n+1}}{\rho(z)}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[\sigma(z)\rho_n(z)\right] = \frac{B_{n+1}}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}\left[\tau_n(z)\rho_n(z)\right],$$

то с помощью формулы Лейбница для производных от произведения функций находим

$$\begin{aligned}y_{n+1}(z) &= \frac{B_{n+1}}{\rho(z)}\left\{\tau_n(z)\frac{d^n}{dz^n}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right] + n\tau_n'\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]\right\} = \\ &= \frac{B_{n+1}}{B_n}\left[\tau_n(z)y_n(z) - \frac{n}{\lambda_n}\tau_n'\sigma(z)y_n'(z)\right].\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma(z)\,y_n'(z) = \frac{\lambda_n}{n\tau_n'}\left[\tau_n(z)\,y_n(z) - \frac{B_n}{B_{n+1}}\,y_{n+1}(z)\right], \tag{7}$$

что совпадает с формулой (4.11) при $\nu = n$.

3) С помощью формулы (4) при $m = n-1$ легко вычислить *коэффициенты* a_n, b_n *при старших степенях* z в разложении

$$y_n(z) = a_n z^n + b_n z^{n-1} + \ldots$$

Так как

$$y_n^{(n-1)}(z) = n!a_n z + (n-1)!b_n,$$

то

$$A_{n-1,\,n}B_n\tau_{n-1}(z) = n!\ a_n z + (n-1)!\ b_n.$$

Отсюда

$$a_n = \frac{A_{n-1,n}B_n}{n!}\tau_{n-1}' = B_n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right),\quad a_0 = B_0; \tag{8}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau_{n-1}'}. \tag{9}$$

4) *Численные значения* полиномов Якоби, Лагерра при некоторых значениях z могут быть найдены с помощью формулы Родрига, если воспользоваться правилом Лейбница для вычисления производных от произведения функций:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}, \tag{10}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}. \tag{11}$$

Отсюда для полиномов Лежандра имеем

$$P_n(1) = 1,\quad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{12}$$

3. Производящие функции. Будем называть *производящей функцией* для системы полиномов гипергеометрического типа $\{y_n(z)\}$ такую функцию $\Phi(z, t)$, разложение которой в ряд по степеням t при достаточно малых t имеет вид

$$\Phi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{y}_n(z)\frac{t^n}{n!}, \tag{13}$$

где $\bar{y}_n(z)$ — полином гипергеометрического типа, для которого постоянная B_n в формуле Родрига (2) равна единице, т. е.

$$\bar{y}_n(z) = \frac{1}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}\left[\sigma^n(z)\rho(z)\right]$$

(очевидно, что $y_n(z) = B_n\bar{y}_n(z)$). Согласно (3.1)

$$y_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sigma^n(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds, \tag{14}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий точку $s = z$ (при этом предполагается, что функция $\rho(s)$ аналитична в области, ограниченной контуром C). Подставим в (13) выражение (14) для $\bar{y}_n(z)$ и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int\limits_C \frac{\rho(s)}{s-z} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma(s)\,t}{s-z} \right]^n \right\} ds.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования при достаточно малых t и фиксированном z может быть легко обосновано. Стоящая под интегралом геометрическая прогрессия суммируется, что дает

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i \rho(z)} \int\limits_C \frac{\rho(s)\,ds}{s - z - \sigma(s)\,t}.$$

Знаменатель подынтегрального выражения имеет, вообще говоря, два корня. Если $t \to 0$, то один из корней, который обозначим через $\xi(z, t)$, стремится к $s = z$. Тогда другой корень, если он существует, стремится к бесконечности при $t \to 0$. Поэтому при достаточно малых t можно считать, что внутри контура C лежит лишь один корень $s = \xi(z, t)$ знаменателя подынтегрального выражения, а подынтегральная функция имеет внутри контура C один полюс первого порядка с вычетом, равным

$$C_{-1} = \left. \frac{\rho(s)}{1 - \sigma'(s)\,t} \right|_{s=\xi(z,t)}.$$

В результате для функции $\Phi(z, t)$ получаем выражение

$$\Phi(z, t) = \left. \frac{\rho(s)}{\rho(z)} \frac{1}{1 - \sigma'(s)\,t} \right|_{s=\xi(z,t)}. \tag{15}$$

Формула (15) для функции $\Phi(z, t)$, входящей в разложение (13), была получена для достаточно малых значений $|t|$. По принципу аналитического продолжения разложение (13) остается справедливым в круге $|t| < R$, где R — расстояние от начала координат до ближайшей особой точки функции $\Phi(z, t)$ (при фиксированном значении z).

В виде примера получим производящую функцию для полиномов Лежандра. В этом случае

$$\xi(z, t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4t(t+z)}}{2t}$$

и, следовательно, по формуле (15)

$$\Phi(z, t) = \left. \frac{1}{1 + 2st} \right|_{s=\xi(z,t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4tz + 4t^2}}$$

Так как для полиномов Лежандра $B_n = (-1)^n/(2^n n!)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+4tz+4t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)(-2t)^n.$$

Если заменить t на $-t/2$, то получим обычно используемое выражение для производящей функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, t^n. \tag{16}$$

Если $-1 \leqslant z \leqslant 1$, то разложение (16) сходится при $|t| < 1$, так как особые точки производящей функции, являющиеся корнями уравнения $1-2tz+t^2=0$, определяются формулой $t_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$ $(\cos\varphi = z)$ и лежат на окружности $|t| = 1$.

Выражение (16) часто применяется в теоретической физике в виде

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

где $r_< = \min(r_1, r_2)$, $r_> = \max(r_1, r_2)$, θ — угол между радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Действительно,

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\theta} = \begin{cases} r_1\sqrt{1+\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 - 2\dfrac{r_2}{r_1}\cos\theta}, & r_2 < r_1, \\ r_2\sqrt{1+\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 - 2\dfrac{r_1}{r_2}\cos\theta}, & r_1 < r_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_>\sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_>\sqrt{1+\left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^2 - 2\dfrac{r_<}{r_>}\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

Для полиномов Лагерра и Эрмита с помощью формул (13), (15) получим следующие разложения:

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left\{-\frac{zt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(z)\, t^n,$$

$$\exp\{2zt - t^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

4. Свойство ортогональности. Если функцию $\rho(z)$ рассмотреть на вещественной оси $z=x$ и подчинить некоторым дополнительным условиям, то можно получить ряд специальных свойств полиномов гипергеометрического типа $y_n(x)$.

Теорема. *Пусть функция $\rho(x)$ удовлетворяет на концах некоторого интервала (a, b) условию*

$$\sigma(x)\rho(x)x^k\big|_{x=a,b}=0, \quad k=0,1,\ldots \tag{17}$$

Тогда полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, соответствующие различным значениям λ_n, будут ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, т. е.

$$\int_a^b y_n(x)\,y_m(x)\,\rho(x)\,dx=0, \qquad \lambda_m\neq\lambda_n.$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальные уравнения для полиномов $y_n(x)$, $y_m(x)$:

$$[\sigma(x)\rho(x)y_n']'+\lambda_n\rho(x)y_n=0,$$
$$[\sigma(x)\rho(x)y_m']'+\lambda_m\rho(x)y_m=0.$$

Умножим первое из них на $y_m(x)$, второе на $y_n(x)$. Вычтем из первого равенства второе и результат проинтегрируем в пределах от a до b. Так как

$$y_m(x)[\sigma(x)\rho(x)y_n'(x)]'-y_n(x)[\sigma(x)\rho(x)y_m'(x)]'=$$
$$=\frac{d}{dx}\{\sigma(x)\rho(x)W[y_m(x),y_n(x)]\},$$

где $W(u,v)=\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ — вронскиан, то мы приходим к следующему равенству:

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx=\sigma(x)\rho(x)W[y_m(x),\ y_n(x)]\Big|_a^b.$$

Так как вронскиан $W[y_m(x), y_n(x)]$ является полиномом относительно переменной x, то правая часть полученного равенства равна нулю в силу условия (17). Поэтому при $\lambda_m\neq\lambda_n$ имеем

$$\int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx=0, \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что условие $\lambda_m\neq\lambda_n$ в равенстве (18) можно заменить условием $m\neq n$, если $\tau'+\frac{n+m-1}{2}\sigma''\neq 0$.

Для выполнения условий (17) при конечных значениях a, b достаточно потребовать, чтобы функция $\rho(x)$ удовлетворяла следующим граничным условиям:

$$\sigma(x)\rho(x)|_{x=a}=0,\quad \sigma(x)\rho(x)|_{x=b}=0.$$

Если же, например, a — конечное число, $b=+\infty$, то условия (17) будут эквивалентны условиям

$$\sigma(x)\rho(x)|_{x=a}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\sigma(x)\rho(x)x^k=0,\quad k=0,1,\ldots$$

Аналогичным образом рассматриваются остальные возможные случаи.

Полиномы гипергеометрического типа $y_n(x)$, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию (17), называются *классическими ортогональными полиномами.* Обычно эти полиномы рассматривают при дополнительных условиях $\rho(x)>0$, $\sigma(x)>0$ на интервале (a, b). Перечисленным требованиям полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворяют при $a=-1$, $b=1$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$; полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ — при $a=0$, $b=+\infty$, $\alpha>-1$; полиномы Эрмита $H_n(x)$ — при $a=-\infty$, $b=+\infty$. В рассмотренных случаях в равенстве (18) условие $\lambda_m\neq\lambda_n$ можно заменить эквивалентным условием $m\neq n$.

Из свойств производных полиномов гипергеометрического типа (см. п. 2) вытекает, что *производные классических ортогональных полиномов* $y_n^{(k)}(x)$ *являются классическими полиномами, ортогональными с весом* $\rho_k(x)=\sigma^k(x)\rho(x)$ *на интервале* (a, b):

$$\int_a^b y_n^{(k)}(x)\,y_m^{(k)}(x)\,\rho_k(x)\,dx=\delta_{mn}d_{kn}^2.$$

Квадраты норм d_{kn}^2 полиномов $y_n^{(k)}(x)$ легко выразить через квадрат нормы $d_n^2\equiv d_{0n}^2$ полинома $y_n(x)$. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением для $y_n^{(k)}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_{k+1}(x)\,y_n^{(k+1)}(x)\right]+\mu_{kn}\rho_k(x)\,y_n^{(k)}(x)=0. \tag{19}$$

Если уравнение (19) умножить на $y_n^{(k)}(x)$ и проинтегрировать на интервале (a, b), то с помощью интегрирования по частям получим

$$\rho_{k+1}(x)\,y_n^{(k+1)}(x)\,y_n^{(k)}(x)\Big|_a^b-\int_a^b\left[y_n^{(k+1)}(x)\right]^2\rho_{k+1}(x)\,dx+$$
$$+\mu_{kn}\int_a^b\left[y_n^{(k)}(x)\right]^2\rho_k(x)\,dx=0.$$

Подстановка в силу условия (17) равна нулю, поэтому

$$d_{k+1,n}^2=\mu_{kn}d_{kn}^2.$$

Отсюда по индукции получаем

$$d_{mn}^2 = d_n^2 \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn}. \tag{20}$$

Соотношение (20) при $m = n$ позволяет вычислить величину d_n^2 для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита, так как

$$y_n^{(n)}(x) = n! a_n, \quad d_{nn}^2 = (n! a_n)^2 \int_a^b \sigma^n(x) \rho(x) dx. \tag{20a}$$

Интеграл $\int_a^b \sigma^n(x) \rho(x) dx$ можно выразить через гамма-функцию (см. Дополнение А, п. 5). В результате находим

$$d_n^2 = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{для } P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \\ \dfrac{1}{n!}\Gamma(n+\alpha+1) & \text{для } L_n^\alpha(x), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{для } H_n(x). \end{cases}$$

Основные характеристики полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита приведены в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики классических ортогональных полиномов

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$	$L_n^\alpha(x)$ $(\alpha > -1)$	$H_n(x)$
(a, b)	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1+\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$
B_n	$(-1)^n/(2^n n!)$	$1/n!$	$(-1)^n$
a_n	$\dfrac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\dfrac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\dfrac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n (n-1)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$(-1)^{n-1}\dfrac{n+\alpha}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n! \sqrt{\pi}$